Pemodelan Pengurangan Populasi *a la* Thanos dalam Film *Avengers: Infinity War*

Muhammad Rizki Fadillah[1], Septiana[2]
Institut Teknologi Bandung[1]
Institut Teknologi Bandung[2]
m.rizki.fadillah@gmail.com

Abstrak—Pada akhir film *Avengers: Infinity War*, tokoh antagonis utama film tersebut, Thanos, berhasil memperoleh enam batu yang disebut *Infinity Stones* yang dibutuhkan untuk mencapai tujuan akhir yakni memusnahkan sebagian populasi makhluk hidup di dunia supaya makhluk hidup yang tersisa dapat hidup dengan sumber daya yang melimpah, bahagia, dan terbebas dari kelaparan dan perang. Pada makalah ini akan dimodelkan bagaimana dinamika populasi manusia jika kejadian pemusnahan populasi manusia oleh Thanos benar-benar terjadi dengan menggunakan asumsi-asumsi sebagai berikut: laju populasi manusia mengikuti model logistik dan pemusnahan populasi dilakukan jika populasi manusia sudah mencapai (1-α)100% dari *carrying capacity* planet Bumi. Selain dengan menggunakan model logistik, akan digunakan simulasi dengan *random number* untuk memodelkan peluang pemusnahan setiap individu yang bersifat saling bebas dengan ekspektasi 0.5. Kemudian, akan dimodelkan untuk keadaan dari pada memusnahkan sebagian populasi makhluk hidup, Thanos memilih untuk meningkatkan *carrying capacity* dengan kekuatan *Infinity Stones* yang dimilikinya jika populasi manusia mencapai (1-α)100% dari *carrying capacity* planet Bumi.

Kata kunci: Infinity War, Logistik, Populasi, Thanos

I. PENDAHULUAN

Avengers: Infinity War adalah film pahlawan super yang dirilis pada 27 April 2018. Pada film tersebut, sekumpulan pahlawan super bernama Avengers bertarung melawan Thanos, penjahat yang berniat mengumpulkan enam buah batu sakti yang disebut *Infinity Stones* dengan tujuan melakukan pengurangan populasi makhluk hidup di seluruh alam semesta. Menurut Thanos, terlalu banyak populasi akan mengakibatkan menipisnya sumber daya dan pada akhirnya terjadi peperangan, kelaparan, dan berbagai bencana sehingga mengurangi populasi, menurut Thanos, adalah upaya untuk menciptakan dunia yang "damai dan penuh rasa syukur". Pada akhirnya,Thanos berhasil mengumpulkan *Infinity Stones* dan menghilangkan separuh populasi dunia.

Di dalam makalah ini akan dijelaskan bagaimana dinamika populasi manusia jika terjadi pemusnahan populasi ketika populasi manusia sudah mencapai batas tertentu, yakni (1-α)100% dari *carrying capacity* planet Bumi untuk suatu α dengan $0 < \alpha < 1$. Selain itu akan disimulasikan kondisi jika yang terjadi adalah setiap individu mempunyai peluang 50% untuk musnah, dan kejadian antar individu dipandang saling bebas. Kemudian akan ditinjau bagaimana dinamika populasi jika Thanos memilih untuk meningkatkan *carrying capacity* setiap kali populasi mencapai (1-α)100% dari *carrying capacity*.

Pada makalah ini, model pertumbuhan populasi yang digunakan adalah model logistik yang dicetuskan oleh Pierre-François Verhulst pada 1838. Verhulst terinspirasi oleh Adolphe Quatelet yang menyatakan bahwa populasi tidak dapat bertumbuh secara geometrik terus-menerus (seperti yang dicetuskan oleh Thomas Malthus) karena terdapat faktor-faktor yang menghambat pertumbuhan tersebut. Faktor penghambat tersebut, menurut Quatelet, sebanding dengan kuadrat dari laju pertumbuhan populasi (menurut [1]), namun Verhulst menolak ide tersebut dan mengajukan model dengan penghambat pertumbuhan populasinya adalah rasio antara populasi dengan titik jenuh populasi yang disebut *carrying capacity* (K). Model logistik Verhulst mempunyai parameter-parameter berupa populasi awal, laju populasi awal dan K, dengan K membentuk batas atas bagi besaran populasi. Model logistik Verhulst dinyatakan dalam persamaan diferensial orde satu:

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K}) \quad (1)$$

dengan P menyatakan banyaknya populasi, r menyatakan laju pertumbuhan populasi, dan K adalah *carrying capacity* dari tempat tinggal populasi tersebut. Laju populasi akan mendekati model eksponensial sederhana (model yang dicetuskan oleh Malthus) untuk banyaknya populasi yang relatif kecil dibandingkan dengan K (tepatnya untuk populasi lebih kecil dari K/2), laju populasi akan menurun ketika banyaknya populasi lebih besar dari K/2, dan populasi akan menuju K pada keadaan *steady-state*. Berdasarkan [2] model logistik digunakan dalam makalah ini karena cukup mudah untuk diselesaikan secara analitik, dan menjadi basis bagi model-model populasi yang lebih kompleks.

Tujuan penelitian ini adalah untuk menginvestigasi apakah solusi dari permasalahan dunia yang diajukan oleh Thanos dalam film *Infinity War* sudah tepat, atau apakah penambahan *carrying capacity* merupakan pilihan yang lebih tepat. Karya ilmiah ini bersifat rekreasional namun semoga karya ilmiah ini dapat menyadarkan kita sebagai manusia bahwa kita hidup di bumi bersama-sama dengan sumber daya yang terbatas sehingga sudah seyogyanya kita menjaga dan melestarikan sumber daya yang ada.

II. METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan dengan cara eksplorasi. Setiap permasalahan yang diajukan akan dilakukan eksplorasi secara analisis dan numerik (simulasi menggunakan perangkat lunak MATLAB).

A. Asumsi

Asumsi – asumsi yang digunakan dalam eksplorasi ini adalah

1. Laju banyaknya populasi manusia mengikuti model logistik, yakni (1)
2. Populasi awal selalu berada di bawah threshold yakni (1-α)100% dari *carrying capacity*
3. Aksi pemusnahan atau penambahan *carrying capacity* hanya dilakukan ketika populasi lebih besar daripada *threshold*
4. Setelah pemusnahan atau penambahan *carrying capacity* terjadi, laju pertumbuhan populasi (parameter r) tetap sama seperti sebelum terjadi pemusnahan

B. Data dan Parameter

Data yang digunakan adalah data dari dunia nyata, yakni (menurut [3]) populasi awal adalah P_0=7.7 miliar jiwa dengan pertumbuhan saat ini sebesar 82 juta per tahun. Untuk *carrying capacity*, karena menurut [4] estimasi terkait *carrying capacity* bervariasi dari 2 miliar hingga 1024 miliar, dipilih nilai K=10 miliar yakni nilai di antara dua buah estimasi paling populer (yakni 8 miliar dan 16 miliar), dan dipilih α=0.1. Sedangkan parameter r dapat diperoleh dari persamaan

$$82 \times 10^6 = \frac{dP}{dt}\Big|_{P=P_0} = rP_0(1 - \frac{P_0}{K}) \quad (2)$$

sehingga diperoleh r≈0.04.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Menurut [5], solusi umum dari (1) adalah

$$P(t) = \frac{K}{Ae^{-rt}+1} \quad (3)$$

dengan A suatu konstanta, sedangkan solusi dari (1) dengan nilai awal P(0)=P_0 dengan 0<P_0<K adalah

$$P(t) = \frac{KP_0}{e^{-rt}(K-P_0)+P_0}. \quad (4)$$

A. Metode Analitik

Masalah pertumbuhan populasi logistik dengan pemusnahan ini dapat dipandang sebagai berikut: Perhatikan bahwa fungsi (4) bersifat monoton naik, sehingga jika diberikan suatu P_0 dengan $P_0<(1- \alpha)K$ (berdasarkan asumsi bahwa nilai awal berada dibawah *threshold)* maka P akan menuju (1-α)K, dan ketika nilai P sudah berada di atas (1- α)K, maka pemusnahan dilakukan, yakni menghilangkan setengah populasi hingga hanya tersisa setengahnya. Secara diskrit, hal ini dapat dimodelkan sebagai berikut (diturunkan dari (1)).

$$P(t+1) = \begin{cases} P(t) + r \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) \cdot \Delta t \text{ jika } P(t) < (1-\alpha)K \\ \frac{P(t)}{2} \text{jika } P(t) \geq (1-\alpha)K \end{cases} \quad (5)$$

Secara kontinu, peristiwa pemusnahan dapat digambarkan dengan membuat *jump discontinuity* pada titik dimana P pertama kali menyentuh garis y= (1-α)K, yakni t yang memenuhi

$$(1-\alpha)K = \frac{KP_0}{e^{-rt}(K-P_0)+P_0}. \quad (6)$$

Solusi dari (6) adalah

$$t_1 = \frac{\ln\left(\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{K-P_0}{P_0}\right)\right)}{r} \quad (7)$$

yang merupakan waktu pemusnahan pertama terjadi. Setelah pemusnahan terjadi, populasi penduduk menjadi (1-α)K/2. Lebih jauh lagi, dengan laju pertumbuhan penduduk yang sama seperti waktu sebelum pemusnahan, P akan naik kembali hingga mencapai *threshold*, kemudian ketika sudah mencapai *threshold* pemusnahan terjadi lagi sehingga populasi penduduk kembali menjadi (1-α)K/2 dan begitu seterusnya. Pada akhirnya, proses pertumbuhan dan pemusnahan akan terjadi secara periodik dengan periode

$$t_p = \frac{\ln\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)}{r} \quad (8)$$

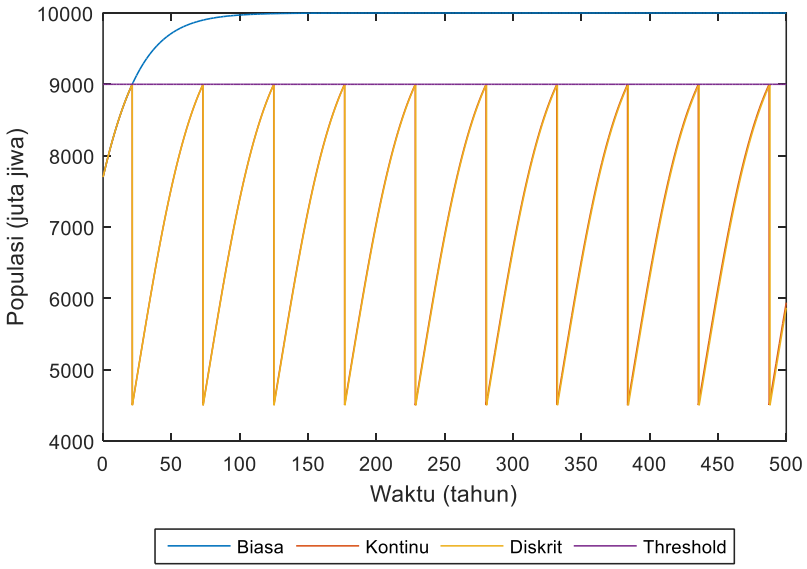
yang diperoleh dengan memasukkan $P_0=(1-\alpha)K/2$ ke (7).

Diperoleh fungsi yang memodelkan pertumbuhan dan pemusnahan populasi sebagai berikut:

$$P(t) = \begin{cases} \frac{KP_0}{e^{-rt}(K-P_0)+P_0}, 0 < t < t_1 \\ \frac{K(1-\alpha)}{(1+\alpha)e^{-r(t-t_1)}+(1-\alpha)} \quad , t_1 \leq t < t_1 + t_p. \\ P(t-t_p), t > t_p \end{cases} \quad (9)$$

dengan bagian fungsi untuk t yang memenuhi $(t_1 \leq t < t_1 + t_p)$ diperoleh dengan memasukkan $P_0=(1-\alpha)K/2$ ke (4) dan mentranslasi fungsinya sejauh t_1 searah sumbu x.

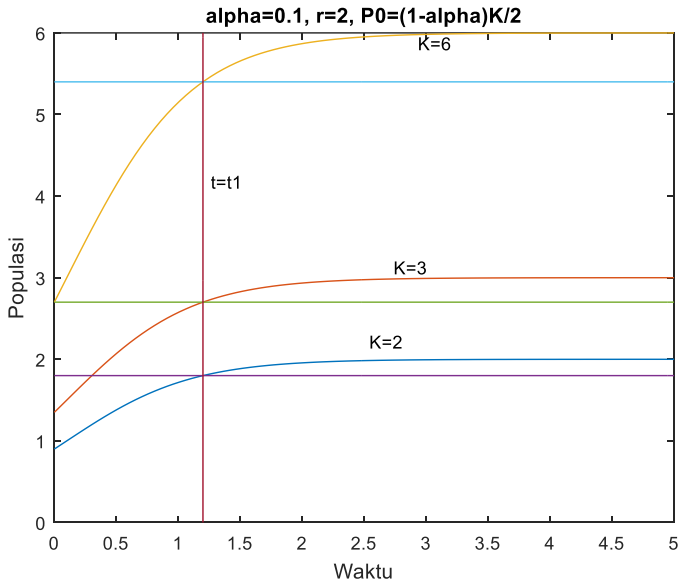
Pada Gambar 1, terlihat bahwa grafik kontinu deterministik (yakni plot fungsi secara langsung) dan diskrit deterministik berimpit, dan akan terus berosilasi dengan periode $t_p \approx 51$ tahun. Jadi, setelah pemusnahan pertama, Thanos harus memusnahkan populasi setiap 51 tahun sekali agar populasi tetap berada di bawah *threshold*.



GAMBAR 1. GRAFIK FUNGSI POPULASI DENGAN PEMUSNAAHAN (DETERMINISTIK)

Perhatikan bahwa periode (t_p) hanya dipengaruhi oleh parameter-parameter α dan r dan tidak dipengaruhi oleh populasi awal dan *carrying capacity*.

Pada Gambar 2, terlihat bahwa untuk nilai awal $P_0=(1-\alpha)K/2$ (yang menandakan periode pasca pemusnahan pertama), α=0.1 dan r=2 ketiga grafik fungsi akan menyentuh P=(1-α)K pada waktu yang sama ($t_1\approx1.20$).



GAMBAR 2. GRAFIK FUNGSI POPULASI (MODEL LOGISTIK BIASA)

B. Simulasi Probabilistik

Pada film *Avengers: Infinity War*, makhluk hidup tidak hanya berada di Bumi, namun tersebar di berbagai planet di alam semesta. Jika metode pemusnahan makhluk hidup oleh Thanos berjalan di seluruh alam semesta, maka pemusnahan tersebut dapat dipandang sebagai proses membalikkan koin: setiap individu punya peluang musnah 0.5 dan pemusnahan antar-individu berlangsung saling bebas, dengan total (di seluruh alam semesta, setidaknya pada semesta film tersebut) individu yang tersisa adalah setengah dari total populasi. Jadi kejadian pemusnahan setiap individu dapat dipandang sebagai kejadian Bernoulli

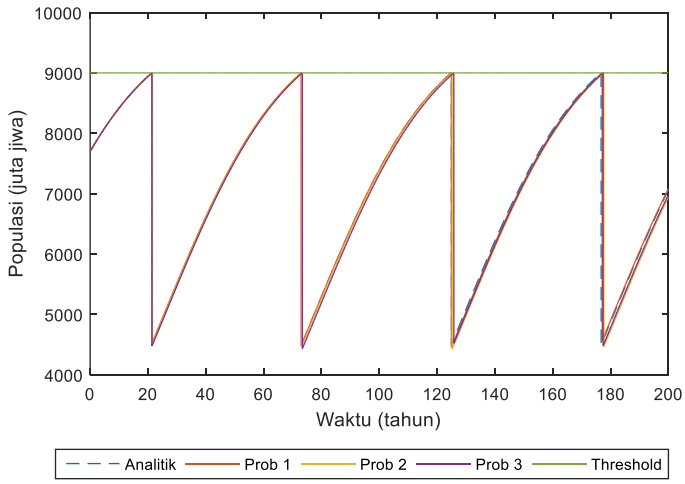
dengan peluang 0.5, sedangkan secara total (di planet Bumi) kejadian pemusnahan tersebut adalah kejadian binomial dengan p=0.5 dan n=P(t) ketika P(t)≥ (1-α)K, dengan asumsi *carrying capacity* yang dijadikan acuan (kapan akan terjadi pemusnahan) adalah *carrying capacity* Bumi.

Menurut [6], untuk n besar dan p=0.5, peubah acak berdistribusi binomial(n,p) akan mendekati peubah acak normal dengan rataan np=0.5n dan variansi np(1-p)=0.25n. Namun karena peubah acak normal dapat bernilai sangat besar maupun sangat kecil, realisasi nilai peubah acak ini akan dibatasi diantara suatu batas bawah P_b dan batas atas (1-α)K. Model diskrit untuk pemusnahan dengan metode probabilistik dapat diperoleh dengan memodifikasi (5) menjadi

$$P(t+1) = \begin{cases} P(t) + r \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) \cdot \Delta t \text{ jika } P(t) < (1-\alpha)K \\ \min\{\max\{q, P_b\}, (1-\alpha)K\} \text{ jika } P(t) \geq (1-\alpha)K \end{cases} \quad (10)$$

dengan q adalah realisasi dari peubah acak Q~N(P(t)/2,P(t)/4)) yang pada aplikasinya dapat di-*generate* dengan menggunakan sintaks normrnd pada program MATLAB. Sebagai contoh akan digunakan data penduduk dunia asli seperti pada contoh sebelumnya, dan dengan batas bawah P_b=1.000.000.

Dari Gambar 3 diperoleh bahwa meskipun setiap simulasi menghasilkan nilai setelah pemusnahan yang berbeda-beda namun masih berada di sekitar grafik fungsi analitik dari model pemusnahan, sehingga peridoe antar pemusnahan tidak berbeda jauh dengan periode yang diperoleh menggunakan cara analitik.



GAMBAR 3. GRAFIK HASIL SIMULASI DENGAN METODE PROBABILISTIK (3 SIMULASI)

C. *Menggandakan Carrying Capacity*

Bagaimana jika dari pada memusnahkan sebagian populasi, Thanos memilih untuk meningkatkan *carrying capacity* dua kali lipat setiap kali populasi mencapai *threshold* dengan kekuatan *Infinity Stones* yang dimilikinya?

Misalkan populasi awal adalah P_0 dengan P_0<(1-α)K. Ketika populasi mencapai (1-α)K (sebut ketika t=t_1), maka *carrying capacity* bertambah dua kali lipat menjadi 2K, sehingga untuk t>t_1, fungsi yang digunakan adalah (4) dengan nilai awal (1-α)K dan ditranslasi sejauh t_1 searah sumbu x.

$$P(t) = \begin{cases} \frac{KP_0}{e^{-rt}(K-P_0)+P_0}, 0 < t < t_1 \\ \frac{2K(1-\alpha)}{(1+\alpha)e^{-r(t-t_1)}+(1-\alpha)}, \ t_1 \leq t \end{cases} \quad (11)$$

Pada akhirnya, P akan melewati *threshold* baru yakni 2(1-α)K. Waktu yang dibutuhkan oleh populasi untuk mencapai nilai P=(1-α)2K dari P=(1-α)K adalah (diperoleh melalui (6) dengan mengubah K menjadi 2K dan P_0=(1-α)K) sama seperti periode pemusnahan pada uraian sebelumnya yakni t_p yang diberikan oleh (8). Jadi pada saat t=t_1+t_p, P akan mencapai 2(1-α)K. Pada saat itu, *carrying capacity* akan menjadi 4(1-

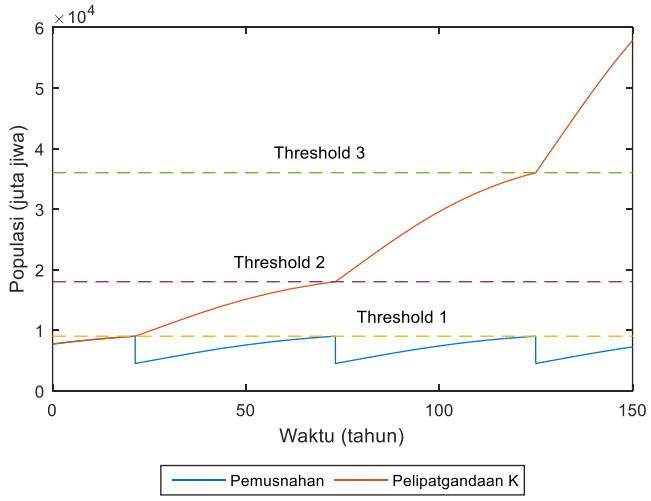
α)K, sehingga untuk $t>t_1+t_p$, fungsi yang digunakan adalah fungsi (11) yang "disambung" dengan fungsi (4) dengan nilai awal 2(1-α)K, *carrying capacity* 4K dan ditranslasi sejauh t_1+t_p searah sumbu x.

$$P(t)=\begin{cases}\dfrac{KP_0}{e^{-rt}(K-P_0)+P_0}, 0<t<t_1\\ \dfrac{2K(1-\alpha)}{(1+\alpha)e^{-r(t-t_1)}+(1-\alpha)}, t_1\le t<t_1+t_p.\\ \dfrac{4K(1-\alpha)}{(1+\alpha)e^{-r(t-t_1-t_p)}+(1-\alpha)}, t_1+t_p\le t\end{cases} \quad (12)$$

Selanjutnya, waktu yang dibutuhkan untuk P bergerak dari P=2(1-α)K ke P=4(1-α)K akan sama dengan t_p, sehingga P akan mencapai 4(1-α)K pada $t=t_1+2t_p$, dan untuk t_1+t_p fungsi yang digunakan adalah fungsi (12) yang "disambung" dengan fungsi (4) dengan nilai awal 4(1-α)K, *carrying capacity* 8K dan ditranslasi sejauh t_1+2t_p searah sumbu x. Pada akhirnya dapat diperoleh fungsi populasi dengan pelipatgandaan *carrying capacity* dengan induksi matematika,

$$P(t)=\begin{cases}\dfrac{KP_0}{e^{-rt}(K-P_0)+P_0}, 0<t<t_1\\ \dfrac{2^{n+1}K(1-\alpha)}{(1+\alpha)e^{-r(t-t_1-nt_p)}+(1-\alpha)},\ t_1+nt_p\le t<t_1+(n+1)t_p, n\in\{0,1,2,\dots\}\end{cases} \quad (13)$$

Sebagai contoh, akan digunakan data populasi dunia asli seperti pada uraian sebelumnya. Pada Gambar 4 terlihat bahwa pada waktu yang sama, kedua grafik fungsi akan mencapai *threshold*-nya masing-masing.



GAMBAR 4. GRAFIK POPULASI DENGAN METODE PEMUSNAHAN VERSUS PELIPATGANDAAN *CARRYING CAPACITY*

D. *Eksplorasi Permasalahan Lainnya*

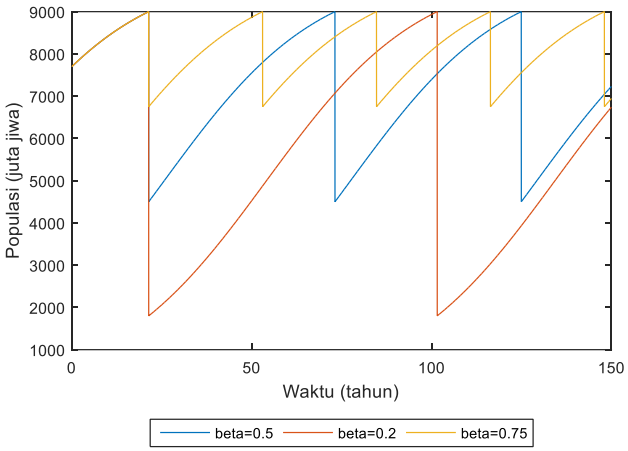
Bagaimana jika diinginkan populasi yang tersisa setelah pemusnahan adalah sebesar β kali populasi sebelumnya, dengan $0<\beta<1$? Permasalahan ini serupa dengan permasalahan pada subbab A, namun kali ini setelah pemusnahan pertama populasi yang tersisa adalah sebanyak β(1-α)K, dan waktu yang dibutuhkan untuk kembali mencapai *threshold* adalah (dengan memasukkan $P_0=\beta(1-\alpha)K$ ke (7))

$$t_p=\frac{\ln\left(1+\frac{1-\beta}{\alpha\beta}\right)}{r} \quad (14)$$

Dengan menuliskan $\ln\left(1+\frac{1-\beta}{\alpha\beta}\right)=\ln\left(\frac{1}{\alpha\beta}+1-\frac{1}{\alpha}\right)$, terlihat bahwa t_p berbanding terbalik dengan β. Hal ini dapat dipahami karena semakin banyak populasi yang disisakan (selamat) maka akan semakin cepat

waktu yang dibutuhkan untuk kembali ke *threshold* populasi sehingga periode antar pemusnahan semakin singkat.

Setelah dilakukan eksplorasi permasalahan untuk berbagai nilai β, kemudian dibuat grafik, maka menghasilkan grafik pada Gambar 5.



GAMBAR 5. GRAFIK POPULASI (METODE PEMUSNAHAN) DENGAN BERBAGAI NILAI BETA

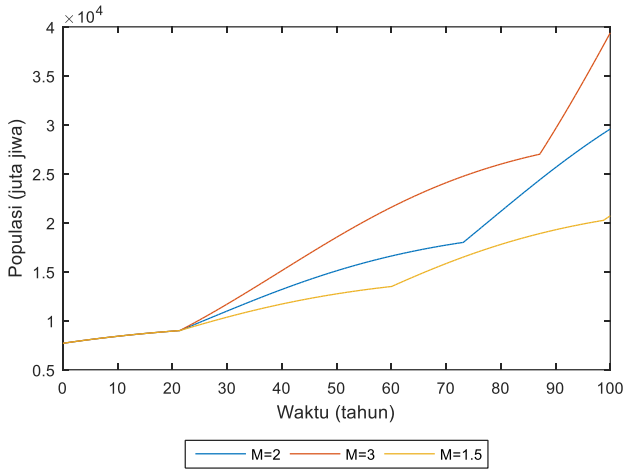
Selain itu, bagaimana jika diinginkan pelipatgandaan *carrying capacity* seperti pada bagian C namun setiap kali populasi mencapai *threshold*, *carrying capacity* bertambah menjadi M kali *carrying capacity* sebelumnya dengan M>1. Untuk kasus ini, periode yang dibutuhkan untuk mencapai suatu *threshold* dari *threshold* sebelumnya adalah (dengan menggunakan (7), mengganti K dengan M^nK dan P_0 dengan $M^{n-1}K$ untuk sebarang n)

$$t_p = \frac{\ln\left(1+\frac{M-1}{\alpha}\right)}{r} \tag{14}$$

sedangkan fungsi populasinya diperoleh dengan cara yang sama dengan bagian C hanya saja mengganti faktor 2 dengan M, yakni

$$P(t) = \begin{cases} \dfrac{KP_0}{e^{-rt}(K-P_0)+P_0}, 0 < t < t_1 \\ \dfrac{M^{n+1}K(1-\alpha)}{(M-1+\alpha)e^{-r(t-t_1-nt_p)}+(1-\alpha)}, \; t_1 + nt_p \le t < t_1 + (n+1)t_p, n \in \{0,1,2,\dots\} \end{cases} \tag{15}$$

Perhatikan pada Gambar 6 dapat diambil kesimpulan, bahwa semakin besar M maka semakin lama periode antar penambahan *carrying capacity*. Hal ini dapat dilihat dari $t_p = \frac{\ln\left(1+\frac{M-1}{\alpha}\right)}{r}$ dimana t_p berbanding lurus dengan M.



GAMBAR 6. GRAFIK POPULASI (MODEL PENAMBAHAN *CARRYING CAPACITY*) UNTUK BEBERAPA NILAI M

IV. SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan yang diperoleh adalah, periode waktu yang dilakukan untuk melakukan pemusnahan populasi hingga setengah populasi total adalah sama dengan periode waktu yang dibutuhkan untuk menggandakan *carrying capacity* ketika populasi sudah mencapai ambang batas tertentu. Namun dengan performansi sama, pilihan untuk menggandakan *carrying capacity* setiap kali populasi melewati *threshold* lebih bijaksana daripada melakukan pemusnahan separuh populasi dunia, karena nyawa manusia tidak ternilai harganya.

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah menggunakan model pertumbuhan populasi lain (selain model logistik) dan menghilangkan beberapa asumsi yang digunakan dalam makalah ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] N. Bacaër. “A Short History of Mathematical Population Dynamics”. London: Springer-Verlag. 2011. pp. 35-36.

[2] A. Tsoularis and J. Wallace. “Analysis of Logistic Growth Models”. Mathematical Biosciences 179. pp. 21-55. July 2002.

[3] Worldometers. “World Population Clock”. Diakses di http://www.worldometers.info/world-population/ pada Januari 2019.

[4] B. Pengra. “One Planet, How Many People? A Review of Earth’s Carrying Capacity”. UNEP Global Environmental Alert Service (GEAS). 2012.

[5] D. Kalman. “A Discrete Approach to Continuous Logistic Growth”. Joint Math Meetings, Atlanta, 2017.

[6] R. Walpole, R. Myers, S. Myers, and K. Ye. “Probability & Statistics for Engineers & Scientists Ninth Edition”. Boston: Pearson. 2012. pp.187-188.