Pelabelan Komposit pada Beberapa Keluarga Graf Unicyclic

Hafif Komarullah[1], Rizqy Amalia Nurfadila[2], Abdul Rosi[3]
Universitas Al Falah As Sunniyah, Indonesia[1]
E-mail: hafififa4@gmail.com

***Abstrak*—** Penelitian ini bertujuan untuk membahas pelabelan komposit pada beberapa keluarga graf *unicyclic* (graf terhubung yang hanyamemiliki satu siklus). Misalkan $G = (V, E)$ graf terhubung sederhana dengan order n dan size m. Pelabelan komposit pada graf G merupakan fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \dots, m+n\}$ sedemikian sehingga $gcd(f(uv), f(vw)) \neq 1$ dengan $u, v, w \in V(G)$. Graf yang memenuhi kaidah pelabelan komposit disebut graf komposit. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, metode deskriptif aksiomatik, dan metode pendeteksian pola. Dalam penelitian ini, didapatkan bahwa graf *bull*, graf *net*, graf *cricket*, graf peach, graf matahari, dan graf hasil operasi *comb* graf siklus dan graf bintang merupakan graf komposit. Penelitan ini diharapkan menambah literatur baru dalam teori graf khususnya pada topik pelabelan graf.

Kata kunci: Pelabelan graf, pelabelan komposit, graf unicyclic

PENDAHULUAN

Teori graf adalah bagian dari matematika yang dalam aplikasinya mengilustrasikan objek permasalahan dengan titik dan kaitan antar objek permasalahan dengan sisi. Graf G dideskripsikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V merupakan himpunan titik-titik yang tak kosong dan E adalah himpunan sisi yang boleh kosong dari pasangan tak terurut titik-titik dalam $V(G)$. Jumlah titik pada graf G disebut $order\ G$ dan jumlah sisi pada graf G disebut $size\ G$. Graf yang memiliki *order* berhingga disebut dengan graf berhingga (Chartrand & Zhang, 2019). Graf pertama kali dikenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 dalam penyelesaian masalah Jembatan Konisberg. Hingga saat ini, topik dalam teori graf terus eksis, salah satunya adalah pelabelan graf.

Pelabelan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan anggota-anggota graf ke bilang bulat dengan syarat-syarat tertentu. Pelabelan graf memiliki peranan krusial dalam memecahkan permasalahan dalam beragam aspek di kehidupan sehari-hari seperti kriptografi (Prihandoko dkk., 2019), kristalografi (Kumar & Vats, 2020), komputer sains (Vinutha & Arathi, 2017), dan jaringan komunikasi (Prasanna dkk., 2014). Pelabelan graf diklasifikasikan menjadi tiga macam berdasarkan domainnya yaitu pelabelan titik (domain berupa titik), pelabelan sisi (domain berupa sisi), dan pelabelan total (domain berupa titik dan sisi) (Marr & Wallis, 2013). Pelabelan pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlàck (1964). Hingga saat ini, lebih dari 200 jenis pelabelan graf telah dipelajari dan dipublikasikan di lebih dari 3000 paper (Gallian, 2022). Salah satu contoh pelabelan graf adalah pelabelan prima yang dikenalkan oleh Entringer pada tahun 1980 dan dipopulerkan oleh Tout dkk. (1982). Pelabelan prima pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif $f: V(G) \to \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ sedemikian sehingga setiap dua titik yang bertetangga (terhubung langsung) memiliki label yang relatif prima. Dua bilangan bulat a dan b dikatakan relatif prima apabila GCD(*Great Common Divisor*) kedua bilangan adalah 1 (Rosen, 2011). Banyak peneliti lain yang terinspirasi dari pelabelan prima dan mengembangkannya menjadi konsep pelabelan graf yang baru diantaranya pelabelan koprima (Berliner dkk., 2016), pelabelan komposit (Maria & Vargese, 2017), pelabelan prima ganjil (Prajapati & Shah, 2018), pelabelan sisi relatif prima (Janani & Ramachandran, 2022), pelabelan sisi koprima (Janani & Ramachandran, 2023), pelabelan total koprima (Komarullah, 2024a), dan lain-lain.

Misalkan $G = (V, E)$ graf terhubung sederhana dengan order n dan size m. Pelabelan komposit pada graf G merupakan fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \dots, m+n\}$ sedemikian sehingga $gcd(f(uv), f(vw)) \neq 1$ dengan $u, v, w \in V(G)$ (Maria & Vargese, 2017). Graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan komposit disebut graf komposit. Maria & Vargese (2017) menunjukkan bahwa graf lintasan, graf siklus, dan graf tangga adalah graf komposit. Manikandan & Sasikala (2022) meneliti tentang pelabelan komposit pada graf hasil operasi *unary* dari graf *comp* dan graf *splitting*. Sethujkkarasi & Vidyanandini (2022) menunjukkan bahwa graf bintang, graf mahkota, graf *bistar* merupakan graf komposit. Hasil lain tentang pelabelan komposit dapat dilihat pada (Karuppuswamy & Kureethara, 2018; Komarullah, 2024b).

Berdasarkan penelitian sebelumnya, maka dalam paper ini dibahas tentang pelabelan komposit pada kelas graf yang berbeda yang dalam hal ini adalah beberapa keluarga graf *unicyclic* (graf terhubung yang hanya memiliki satu siklus). Keluarga graf *unicyclic* yang dibahas dalam paper ini adalah graf *bull*, graf *net*, graf *cricket*, graf *peach*, graf matahari, dan graf hasil operasi *comb* graf siklus dan graf bintang $(C_n \rhd S_m)$. Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan $u \in V(H)$. Operasi *comb* dari graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \rhd H$ adalah graf yang dibentuk dengan mengambil satu salinan G dan $|G|$ salinan dari H selanjutnya melekatkan titik u dari masing-masing graf H salinan ke-i pada titik ke-i dari graf G (Hora & Obata, 2007). Identifikasi titik dari graf G_1 dan G_2 pada titik-titik $u \in V(G_1)$ dan $v \in V(G_2)$ yang dilambangkan dengan $(G_1 \odot_{uv} G_2)$ menghasilkan graf G yang diperoleh dengan melekatkan titik-titik u dan v. Dengan demikian, graf G memiliki $(|V(G_1)| + |V(G_2)| - 1)$ titik dan $(|E(G_1)| + |E(G_2)|)$ sisi (Wijaya & Baskoro, 2015).

Graf siklus dengan order n dan *size* n dinotasikan dengan C_n untuk $n \geq 3$ merupakan graf terhubung sederhana yang setiap titiknya berderajat dua (Wallis, 2001). Graf lintasan dengan order n dan size $n - 1$ adalah graf yang dibangun dari menghapus salah satu sisi pada graf siklus C_n (Wallis, 2001). Graf bintang $S_{1,n}$ adalah graf terhubung sederhana berorder $n+1$ yang dibangun dengan menduplikasi graf lintasan P_2 sebanyak n kali dan selanjutnya menempelkan salah satu ujung dari setiap graf lintasan P_2 menjadi satu. Graf bintang $S_{1,n}$ memiliki n titik berderjat 1 dan satu titik berderajat n (Latifi, 2007).

METODE

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur, deskriptif aksiomatik, dan pendeteksian pola. Metode studi literatur digunakan untuk menggali informasi tentang pelabelan komposit dan perkembangannya. Metode deskriptif aksiomatik diimpelementasikan dengan cara menyajikan beberapa definisi, lemma, atau teorema sebelumnya untuk membantu membuktikan teorema yang ditemukan dalam penelitian ini. Metode pendeteksian pola digunakan untuk mendapatkan fungsi umum dari pelabelan komposit yang telah dilakukan pada setiap graf G dengan order tertentu.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang pelabelan komposit pada graf *bull*, graf *net*, graf *cricket*, graf peach, graf matahari, dan graf hasil operasi *comb* graf siklus dan graf bintang $(C_n \rhd S_m)$.

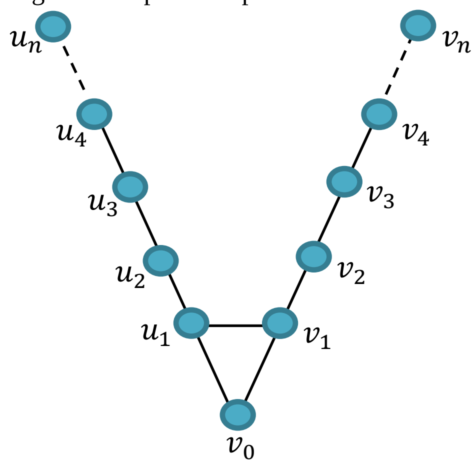
1. Graf *bull*

Graf *bull* adalah graf yang dibangun dari dua graf lintasan P_m yang masing-masing ditempelkan pada dua titik graf siklus C_3. Graf *bull* dinotasikan dengan $B_{3,m}$ dengan m adalah banyaknya titik pada lintasan. Titik dan sisi pada graf *bull* dinotasikan sebagai berikut.

$V(B_{3,m}) = \{v_0\} \cup \{v_i; i \in [1,m]\} \cup \{u_i; i \in [1,m]\}$

$E(B_{3,m}) = \{v_iv_{i+1}; i \in [0, m-1]\} \cup \{v_0u_1\} \cup \{u_iu_{i+1}; i \in [1, m-1]\}$

Ilustrasi dari penotasian titik dan sisi pada graf *bull* dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Penotasian titik dan sisi pada graf *bull* $B_{3,m}$

Teorema 1. Graf *bull* $B_{3,m}$ dengan $m \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa graf *bull* $B_{3,m}$ dengan $m \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit. Definisikan fungsi bijektif $f: V(B_{3,m}) \cup E(B_{3,m}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 4m+2\}$ sebagai berikut.

$f(v_i) = 2i + 1; i = 0, 1, \dots, m.$

$f(u_i) = 2(m+i) + 1; i = 1, 2, \dots, m.$

$f(v_iv_{i+1}) = 2(i+1); i = 1, 2, \dots, m-1.$

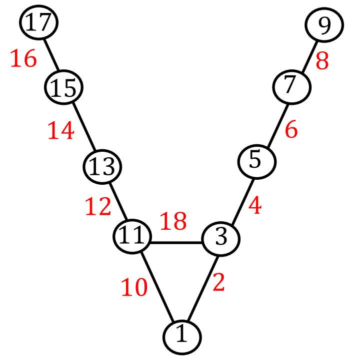
$f(v_0u_1) = 2m + 2.$

$f(u_iu_{i+1}) = 2(m+i+1); i = 1, 2, \dots, m-1.$

$f(u_1v_1) = 4m + 2.$

Jelas bahwa label setiap sisi yang berisisian dengan titik yang sama tidak relatif prima. Dapat ditunjukkan bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan komposit, sehingga terbukti bahwa graf *bull* $B_{3,m}$ dengan $m \geq 2$ merupakan graf komposit.■

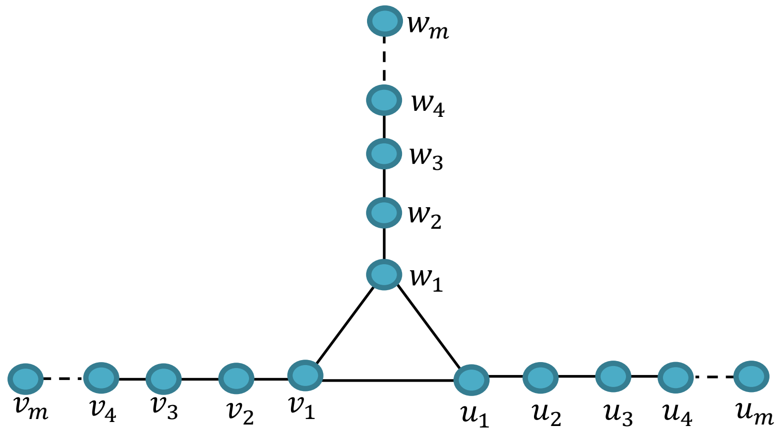
Gambar 2 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf *bull* $B_{3,4}$.



Gambar 2. Pelabelan komposit pada graf *bull* $B_{3,4}$

2. Graf *net*

Graf *net* dengan order $3m$ dan *size* $3m$ dinotasikan dengan $(N_{3,m})$ merupakan graf yang dibangun dari operasi *comb* antara graf siklus C_3 dan graf lintasan P_m $(C_3 \rhd P_m)$. Titik dan sisi pada pada graf *net* dinotasikan sebagai berikut.
$V(N_{3,m}) = \{v_i; i \in [1,m]\} \cup \{u_i; i \in [1,m]\} \cup \{w_i; i \in [1,m]\}$.
$E(N_{3,m}) = \{u_1v_1\} \cup \{u_1w_1\} \cup \{v_1w_1\} \cup \{v_iv_{i+1}, u_iu_{i+1}, w_iw_{i+1}, i \in [1,m]\}$.
Penotasian titik dan sisi pada graf *net* $N_{3,m}$ dapat dilihat pada Gambar 3.

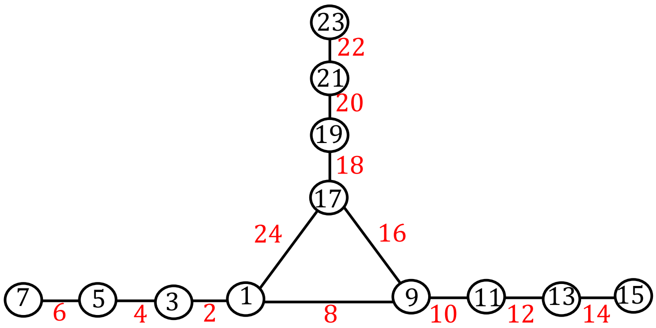


Gambar 3. Penotasian titik dan sisi pada graf *net* $N_{3,m}$

Teorema 2. Graf *net* $N_{3,m}$ dengan $m \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf *net* $N_{3,m}$ dengan $m \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit pada graf tesebut. Definisikan fungsi bijektif $f: V(N_{3,m}) \cup E(N_{3,m}) \to \{1, 2, \dots, 6m\}$ sebagai berikut.
$f(v_i) = 2i - 1; i = 1, 2, \dots, m.$
$f(u_i) = 2(m + i) - 1; i = 1, 2, \dots, m.$
$f(w_i) = 4m + 2i - 1; i = 1, 2, \dots, m.$
$f(v_iv_{i+1}) = 2i; i = 1, 2, \dots, m - 1.$
$f(v_1u_1) = 2m.$
$f(u_iu_{i+1}) = 2(m + i); i = 1, 2, \dots, m - 1.$
$f(u_1w_1) = 4m.$
$f(w_iw_{i+1}) = 4m + 2i; i = 1, 2, \dots, m - 1.$
$f(w_1v_1) = 6m.$

Dapat diidentifikasi bahwa setiap sisi yang bersisian dengan titik yang sama memiliki label yang tidak relatif prima, sehingga fungsi f memenuhi kaidah pelabelan komposit. Terbukti bahwa graf *net* $N_{3,m}$ dengan $m \geq 2$ merupakan graf komposit.■
Untuk memperjelas Teorema 2, disajikan sebuah contoh pelabelan komposit pada graf *net* yang dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4. Pelabelan komposit pada graf *net* $N_{3,4}$

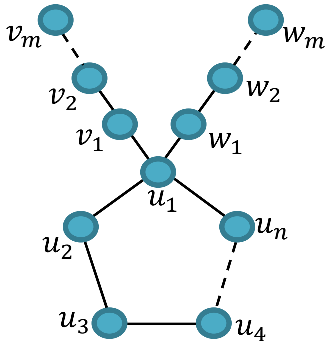
3. Graf *cricket*

Graf *cricket* $Cr_{n,m}$ memiliki order $2m + n$ dan *size* $2m + n$ merupakan graf yang dibangun dari hasil identifikasi titik graf siklus C_n dan graf lintasan P_{2m+1} dengan menempelkan titik tengah graf lintasan dengan salah satu titik pada graf siklus. Titik dan sisi pada graf *cricket* $Cr_{n,m}$ dinotasikan sebagai berikut.

$V(Cr_{n,m}) = \{u_i; i \in [1, n]\} \cup \{v_j; j \in [1, m]\} \cup \{w_j; j \in [1, m]\}$

$E(Cr_{n,m}) = \{u_1u_n, u_iu_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{u_1v_1, u_1w_1\} \cup \{v_jv_{j+1}, w_jw_{j+1}; j \in [1, m-1]\}$

Gambar 5 merupakan contoh penotasian titik dan sisi pada graf *cricket* $Cr_{n,m}$.



Gambar 5. Penotasian titik dan sisi pada graf *cricket* $Cr_{n,m}$

Teorema 3. Graf *cricket* $Cr_{n,m}$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 1$ merupakan graf komposit.

Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf *cricket* $Cr_{n,m}$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 1$ merupakan graf komposit yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit pada graf tesebut. Definisikan fungsi bijektif $f: V(Cr_{n,m}) \cup E(Cr_{n,m}) \to \{1, 2, \dots, 4m + 2n\}$ sebagai berikut.

$f(u_i) = 2i - 1; i = 1, 2, \dots, n.$

$f(v_j) = 2(n + j) - 1; j = 1, 2, \dots, m.$

$f(w_j) = 2(n + m + j) - 1; j = 1, 2, \dots, m.$

$f(u_iu_{i+1}) = 2i; i = 1, 2, \dots, n - 1.$

$f(u_nu_1) = 2n.$

$f(u_1v_1) = 2n + 2.$

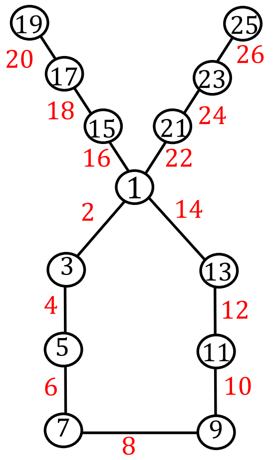
$f(v_jv_{j+1}) = 2(n + j + 1); j = 1, 2, \dots, m - 1.$

$f(u_1w_1) = 2(n + m + 1).$

$f(w_jw_{j+1}) = 2(n + m + j + 1); j = 1, 2, \dots, m - 1.$

Jelas bahwa setiap sisi yang bersisian dengan titik yang sama memiliki label yang tidak relatif prima, sehingga fungsi f memenuhi kaidah pelabelan komposit. Terbukti bahwa graf *cricket* $Cr_{n,m}$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 1$ merupakan graf komposit.■

Gambar 6 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf *cricket* $Cr_{7,3}$.



Gambar 6. Pelabelan komposit pada graf *cricket* $Cr_{7,3}$

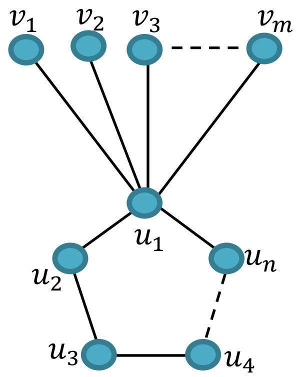
4. Graf *peach*

Graf *peach* dinotasikan dengan C_n^m merupakan graf yang isomorfis dengan $C_n \odot_{u_1 v_0} S_m$ yaitu dengan menempelkan titik pusat graf bintang (titik berderajat m) dengan salah satu titik pada graf siklus. Titik dan sisi pada graf *peach* dinotasikan sebagai berikut.

$V(C_n^m) = \{u_i; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_j; j = 1, 2, \dots, m\}$.

$E(C_n^m) = \{u_1 u_n, u_i u_{i+1}; i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{u_1 v_j; j = 1, 2, \dots, m\}$.

Gambar 7 merupakan contoh penotasian titik dan sisi pada graf *peach* C_n^m.



Gambar 7. Penotasian titik dan sisi pada graf *peach* C_n^m

Teorema 4. Graf *peach* C_n^m dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf *peach* C_n^m dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit pada graf tesebut. Definisikan fungsi bijektif $f: V(C_n^m) \cup E(C_n^m) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2(n+m)\}$ sebagai berikut.

$f(u_i) = 2i - 1; i = 1, 2, \dots, n$.

$f(v_j) = 2(n+j) - 1; j = 1, 2, \dots, m$.

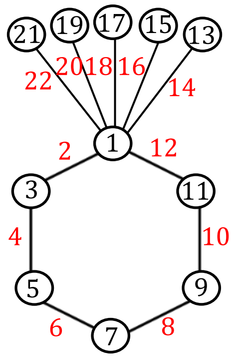
$f(u_i u_{i+1}) = 2i; i = 1, 2, \dots, n-1$.

$f(u_n u_1) = 2n$.

$f(u_1 v_j) = 2(n+j); j = 1, 2, \dots, m$.

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa setiap sisi yang berisisian dengan titik yang sama memiliki label yang tidak relatif prima. Terbukti bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan komposit, sehingga graf *peach* C_n^m dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit.■

Gambar 8 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf *peach* C_6^5



Gambar 8. Pelabelan komposit pada graf *peach* C_6^5

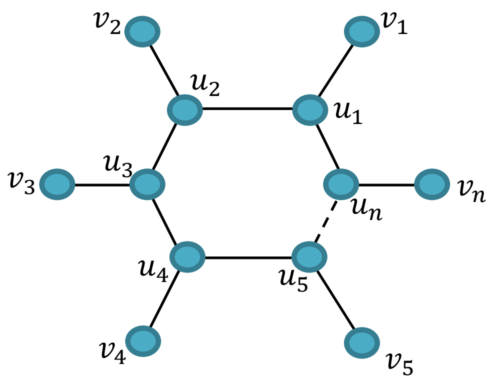
5. Graf matahari

Graf matahari S_n berorder $2n$ dan *size* $2n$ merupakan graf yang isomorfis dengan graf $C_n \rhd P_2$ yaitu dengan menduplikasi graf lintasan P_2 sebanyak n kali dan menghubungkan masing-masing duplikasi graf lintasan P_2 pada setiap titik pada graf siklus C_n (Kristiana dkk., 2023). Titik dan sisi pada graf matahari S_n dinotasikan sebagai berikut.

$V(S_n) = \{u_i; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_i; i = 1, 2, \dots, n\}$.

$E(S_n) = \{u_1u_n, u_iu_{i+1}; i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{u_iv_i; i = 1, 2, \dots, n\}$.

Ilustrasi graf matahari S_n dapat dilihat pada Gambar 9.



Gambar 9. Penotasian titik dan sisi pada graf matahari S_n

Teorema 5. Graf matahari S_n dengan $n \geq 3$ merupakan graf komposit.

Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf matahari S_n dengan $n \geq 3$ merupakan graf komposit yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit pada graf tesebut. Definisikan fungsi bijektif $f: V(S_n) \cup E(S_n) \to \{1, 2, \dots, 4n\}$ sebagai berikut.

$f(u_i) = 4i - 3; i = 1, 2, \dots, n$.

$f(v_i) = 4i - 1; i = 1, 2, \dots, n$.

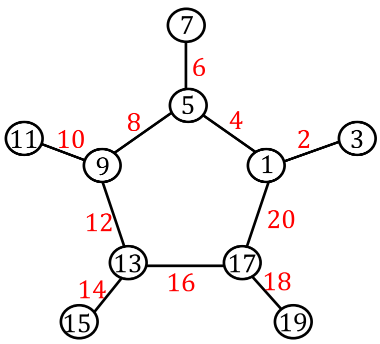
$f(u_iu_{i+1}) = 4i; i = 1, 2, \dots, n - 1$.

$f(u_nu_1) = 4n$.

$f(u_iv_i) = 4i - 2; i = 1, 2, \dots, n$.

Dapat diidentifikasi bahwa setiap sisi yang berisisian dengan titik yang sama memiliki label yang tidak relatif prima, sehingga fungsi f memenuhi kaidah pelabelan komposit. Terbukti bahwa graf matahari S_n dengan $n \geq 3$ merupakan graf komposit.■

Gambar 10 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf matahari S_5.



Gambar 10. Pelabelan komposit pada graf matahari S_5

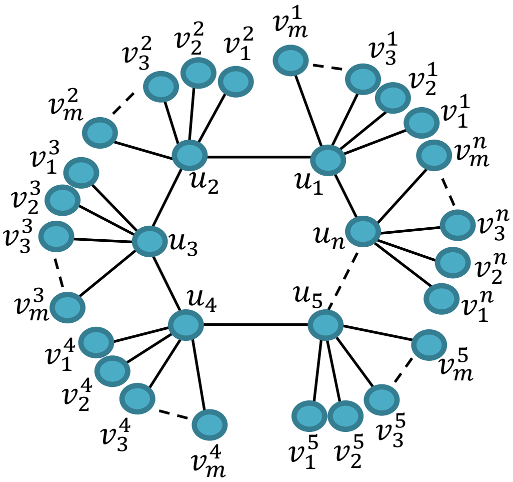
6. Graf hasil operasi *comb* graf siklus dan graf bintang $(C_n \rhd S_m)$

Graf hasil operasi *comb* graf siklus dan graf bintang $(C_n \rhd S_m)$ dibangun dari graf siklus C_n dan graf bintang S_m dengan cara menduplikasi graf bintang S_m sebanyak n kali dan menempelkan masing-masing titik pusat (titik berderjat m) graf bintang pada setiap titik pada graf siklus C_n. Titik dan sisi pada graf hasil operasi *comb* graf siklus dan graf bintang $(C_n \rhd S_m)$ dinotasikan sebagai berikut.

$V(C_n \rhd S_m) = \{u_i; i \in [1,n]\} \cup \{v_j^i; i \in [1,n]; j \in [1,m]\}$

$E(C_n \rhd S_m) = \{u_i u_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{u_n u_1\} \cup \{u_i v_j^i; i \in [1,n]; j \in [1,m]\}$

Gambar 11 merupakan contoh penotasian titik dan sisi pada graf hasil operasi *comb* graf siklus dan graf bintang $(C_n \rhd S_m)$.



Gambar 11. Penotasian titik dan sisi pada graf $C_n \rhd S_m$

Teorema 6. Graf hasil operasi *comb* graf siklus dan graf bintang $(C_n \rhd S_m)$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit.

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa graf hasil operasi *comb* graf siklus dan graf bintang $(C_n \rhd S_m)$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan komposit pada graf tesebut. Definisikan fungsi bijektif $f: V(C_n \rhd S_m) \cup E(C_n \rhd S_m) \to \{1, 2, \dots, 2(n + mn\}$ sebagai berikut.

$f(u_i) = 2i - 1; i = 1, 2, \dots, n.$

$f(v_j^i) = 2(n + j + mi - m) - 1; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m.$

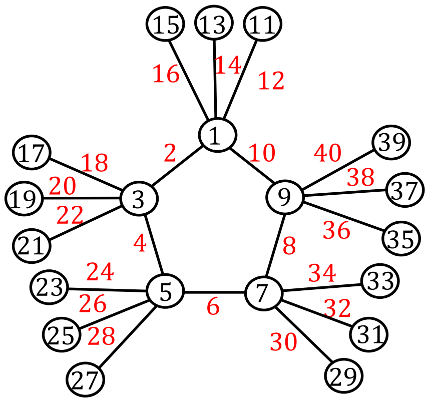
$f(u_i u_{i+1}) = 2i; i = 1, 2, \dots, n - 1.$

$f(u_n u_1) = 2n.$

$f(u_i v_j^i) = 2(n + j + mi - m); i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m.$

Berdasarkan fungsi f diketahui bahwa setiap sisi yang bersisian dengan titik yang sama memiliki label yang tidak relatif prima, sehingga fungsi f memenuhi kaidah pelabelan komposit. Terbukti bahwa graf hasil operasi *comb* graf siklus dan graf bintang $(C_n \rhd S_m)$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ merupakan graf komposit.■

Gambar 12 merupakan contoh pelabelan komposit pada graf $C_5 \rhd S_3$.



Gambar 12. Pelabelan komposit pada graf $C_5 \rhd S_3$

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa graf *bull*, graf *net*, graf *cricket*, graf peach, graf matahari, dan graf hasil operasi *comb* graf siklus dan graf bintang $(C_n \rhd S_m)$ merupakan graf komposit. Peneliti lain dapat mengembangkan pelabelan komposit pada kelas graf lain atau aplikasi pelabelan komposit dalam kehidupan sehari-hari seperti dalam kriptografi ataupun yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Berliner, A. H., Dean, N., Hook, J., Marr, A., Mbirika, A., & McBee, C. D. (2016). Coprime and Prime Labellings of Graphs. *Journal of Integer Sequence*. 19(2): 1-14. https://doi.org/10.48550/arXiv.1604.07698

Chartrand, G. & P. Zhang. 2019. *Chromatic Graph Theory*. Florida: CRC press.

Gallian, J. A. (2022). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, *6*(25), 4-623. Article DS6. https://doi.org/10.37236/11668

Hora, A., & Obata, N. (2007). *Quantum probability and spectral analysis of graphs*. Berlin. Springer Science & Business Media.

Janani, R. dan T. Ramachandran. 2023. Coprime Edge Labeling of Graphs. SSRN. 1-11. http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4486269

Janani, R., & Ramachandran, T. (2022). On Relatively Prime Edge Labeling of Graphs. *Engineering Letters*, *30*(2), 659-665.

Karuppuswamy, P., & Kureethara, J. V. (2018). Composite labelling of graphs-II. *World Scientific News*, (99), 227-234.

Komarullah, H. (2024a, March). Pelabelan Total Koprima. In *Prosiding Seminar Pendidikan Matematika dan Matematika* (Vol. 9). https://doi.org/10.21831/pspmm.v9i1.329

Komarullah, H. (2024b, March). P Pelabelan Komposit Pada Graf Memuat Cycle. In *Prosiding Seminar Pendidikan Matematika dan Matematika* (Vol. 9). https://doi.org/10.21831/pspmm.v9i1.326

Kristiana, A. I., Dafik, D., A'yun, Q., Adawiyah, R., & Alfarisi, R. (2023). On Irregular Colorings of Unicyclic Graph Family. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, *7*(4), 503-512. https://doi.org/10.18860/ca.v7i4.16917

Kumar, A., & Vats, A. K. (2020). Application of graph Labeling in Crystallography. *Proc. Mater. Today*. 1-5. https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.09.371

Latifi, S. (2007). A study of fault tolerance in star graph. *Information Processing Letters*, *102*(5), 196-200. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2006.12.013

Manikandan, T. R., & Sasikala, V. E. (2022). Composite Labelling of Unary Operation of Comp Graph and 2-Tuple of Coconut Tree. *Journal of Algebraic Statistics*, *13*(3), 899-906. https://www.publishoa.com/index.php/journal/article/view/704/594

Maria, P. S., & Varghese, K. J. (2017). Composite Labelling of Graphs. *International Journal of Applied Graph Theory*, *1*(1), 34-41. https://www.ijagt.com/upload/Composite_Labelling_of_Graphs.pdf

Marr, A. M., & Wallis, W. D. (2013). *Magic graphs*. New York: Birkhäuser.

Prajapati, U., & Shah, K. P. (2018). On odd prime labeling. *International journal of Research and Analytical Reviews*, *5*(4), 284-294. https://ijrar.com/upload_issue/ijrar_issue_20542373.pdf

Prasanna, N. L., Sravanthi, K., & Sudhakar, N. (2014). Applications of graph labeling in communication networks. *Oriental Journal of Computer Science and Technology*, *7*(1), 139-145. http://www.computerscijournal.org/pdf/vol7no1/OJCSV07I1P139-145.pdf

Prihandoko, A. C., Dafik, D., & Agustin, I. H. (2019). Implementation of super H-antimagic total graph on establishing stream cipher. *Indonesian Journal of Combinatorics*, *3*(1), 14-23. http://dx.doi.org/10.19184/ijc.2019.3.1.2

Rosen, K. H. (2011). *Elementary number theory*. London: Pearson Education.

Sedlack, J. (1964). Theory of Graphs and Its Applications. House Czechoslovak Acad. Sci. Prague, 163- 164.

Sethujkkarasi, A., & Vidyanandini, S. (2022). *Composite Labelling of Some Graphs and Application* (No. 7434). EasyChair. https://easychair.org/publications/preprint/7tX4

Tout, R., Dabboucy, A. N., & Howalla, K. (1982). Prime labeling of graphs. National Academy Science Letters-India, 5(11), 365-368.

Vinutha, M. S., & Arathi, P. (2017). Applications of graph coloring and labeling in computer science. *International Journal on Future Revolution in Computer Science and Communication Engineering*, *3*(8), 14-16.

Wijaya, K., & Baskoro, E. T. (2016). On Ramsey (2K_2, 2H)(2 K 2, 2 H)-Minimal Graphs. In *Applied Analysis in Biological and Physical Sciences: ICMBAA, Aligarh, India, June 2015* (pp. 219-225). Springer India.

Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. Birkhauser. Boston.