

Pelabelan $L(2, 1)$ pada Beberapa Kelas Graf Pohon

Hafif Komarullah¹, Mifdati Afifah², Pudji Rahmawati³

Universitas Al Falah As Sunniyah, Indonesia

E-mail: hafififa4@gmail.com

Abstrak— Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis nilai minimum span pada beberapa kelas graf pohon. Graf pohon yang dikaji dalam paper ini adalah graf sapu, graf sapu diperumum, graf ilalang, dan $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$. Pelabelan $L(2,1)$ adalah salah satu tipe pelabelan dengan domain berupa titik yang didefinisikan sebagai fungsi yang memetakan titik-titik dalam graf dengan bilangan bulat non-negatif, dengan ketentuan bahwa untuk setiap dua titik yang terpisah oleh jarak satu, selisih labelnya harus minimal dua, dan untuk setiap dua titik yang terpisah oleh jarak dua, selisih labelnya harus minimal satu. Konsep pelabelan $L(2,1)$ berfokus pada penentuan nilai minimum dari label terbesar (nilai minimum span) yang dilambangkan dengan $\lambda_{2,1}$. Metode yang digunakan untuk mendapatkan nilai minimum span adalah studi literatur, deskriptif aksiomatik, dan pendeteksian pola. Dalam paper ini, diperoleh bahwa nilai minimum span pada graf sapu ($Br_{n,m}$), graf sapu diperumum (GBR_{n,m_x}), dan $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$ adalah $m + 2$, sedangkan nilai minimum span graf ilalang ($S_{n,m}$) adalah $n + 1$.

Kata kunci: Pelabelan graf, Pelabelan $L(2, 1)$, Nilai minimum span

PENDAHULUAN

Teori graf adalah salah satu bidang dalam matematika yang memiliki berbagai penggunaan dalam aktivitas sehari-hari. Graf G secara matematis adalah pasangan himpunan tak kosong $V(G)$ yang disebut sebagai titik, dan himpunan sisi $E(G)$ yang boleh kosong dari pasangan tak terurut titik-titik dalam $V(G)$ (Wallis, 2001). Leonhard Euler adalah ilmuwan pertama yang menggunakan teori graf untuk menyelesaikan persoalan. Berdasarkan misteri Jembatan Königsberg, apakah ada kemungkinan untuk menemukan suatu rute di sepanjang tujuh jembatan yang melintasi sebuah sungai bercabang yang mengalir melalui sebuah pulau, dengan syarat hanya melintasi masing-masing jembatan satu kali untuk kembali ke tempat pemberangkatan awal. Leonhard Euler memecahkan masalah ini dengan menggambarkan daratan dengan titik dan jembatan dengan sisi. Dalam penemuan tersebut, Euler menyatakan bahwa untuk melintasi semua jembatan hanya sekali dan kembali ke titik awal, graf yang digunakan haruslah graf Euler, yakni graf yang memiliki sirkuit Euler. Selain itu, menurut Euler, syarat untuk adanya sirkuit Euler adalah setiap titik harus memiliki derajat genap. Graf yang menggambarkan persoalan Jembatan Königsberg memiliki titik-titik dengan derajat ganjil, sehingga tidak memungkinkan untuk menyeberangi semua jembatan sekali dan kembali ke titik semula (Ali dkk, 2021). Sejak pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736, topik teori graf terus berkembang hingga saat ini, salah satunya adalah topik pelabelan graf. Sadlacek adalah penggagas pelabelan graf yang didefinisikan sebagai pemetaan elemen-elemen graf (titik, sisi, atau keduanya) ke bilangan bulat tak negatif dengan syarat-syarat tertentu (Chartrand, 1977). Hingga saat ini, lebih dari 200 jenis pelabelan graf telah dipelajari dan dipublikasikan di lebih dari 3000 paper (Gallian, 2022). Terdapat tiga jenis pelabelan graf yang dibedakan menurut domainnya, yaitu pelabelan titik (dengan domain berupa titik), pelabelan sisi (dengan domain berupa sisi), dan pelabelan total (dengan domain yang mencakup titik dan sisi). (Julaeha dkk, 2017).

Penerapan konsep pelabelan graf memiliki fungsi yang sangat krusial, seperti halnya dalam penentuan frekuensi radio (Griggs & Yeh, 1992), kriptografi (Prihandoko dkk., 2019), kristalografi (Kumar & Vats, 2020), jaringan komunikasi (Prasanna dkk., 2014), dan komputer sains (Vinutha & Arathi, 2017). Penentuan frekuensi pada setiap pemancar radio yang berdekatan merupakan salah satu kasus dari penerapan pelabelan graf. Pemancar radio yang berdekatan harus diberikan frekuensi yang berbeda. Griggs dan Yeh pada tahun 1992 merupakan yang pertama kali merencanakan penggunaan angka bulat non negatif sebagai representasi untuk saluran radio. Ide pelabelan titik dengan jarak minimal dua diajukan oleh Griggs dan Yeh di tahun yang sama. Konsep ini muncul dari perubahan pada masalah penentuan frekuensi yang telah dibahas oleh Hale pada tahun 1980. Agar tidak terjadi tumpang tindih frekuensi, sejumlah pemancar perlu menggunakan frekuensi yang berbeda. Untuk mencegah tumpang tindih frekuensi, dua pemancar yang berdekatan harus diberi saluran yang tidak sama, dan dua pemancar yang dekat harus memiliki saluran dengan perbedaan minimal dua. Graf menunjukkan masalah ini dengan transmitter menjadi titik dan sisi merepresentasikan hubungan dua transmitter. Pelabelan $L(2,1)$ kemudian dipublikasikan oleh Griggs dan Yeh.

Misalkan G adalah sebuah graf sederhana yang terhubung dengan himpunan titik ($V(G)$) dan himpunan sisi ($E(G)$). Pelabelan $L(2,1)$ pada graf G merupakan sebuah fungsi $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ yang memenuhi syarat bahwa setiap dua titik yang berjarak satu harus memiliki perbedaan label minimal dua dan setiap dua titik yang berjarak dua harus memiliki perbedaan label minimal satu (Griggs & Yeh, 1992). Jarak antara titik u dan titik v dalam graf terhubung G adalah jarak lintasan terpendek antara kedua titik tersebut, yang dilambangkan dengan $d(u, v)$ (Budayasa, 2007). Label maksimum dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf G disebut $span(G)$. Jelas bahwa setiap graf G memiliki lebih dari satu span, sehingga kajian pelabelan $L(2,1)$ mengutamakan pencarian nilai minimum dari span tersebut, yang dilambangkan dengan $\lambda_{2,1}(G)$ (Shao dkk., 2008).

Beberapa kelas graf telah dianalisis nilai minimum spannya oleh beberapa peneliti sebelumnya. Nilai minimum span pada graf siklus C_n dan graf lintasan P_n masing-masing adalah 4. Nilai minimum span pada graf bintang S_n dan graf roda W_n masing-masing adalah $n + 1$ (Griggs & Yeh, 1992). Graf Sierpinski ($S_{n,m}$) dengan $m = 2$ dan $m = 3$ memiliki nilai minimum span sama dengan 4 (Sagala & Susiana, 2017). Graf Lollipop ($L_{m,n}$) dan graf pendulum (P_n^k) memiliki nilai minimum span berturut-turut sebesar $2m - 1$ dan $k + 1$ (Umam dkk., 2022). Hasil pelabelan $L(2,1)$ yang lain dapat dilihat pada (Fatimah dkk., 2016), (Aminulloh & Afif, 2019), (Halikin & Komarullah, 2022), (Komarullah dkk., 2022), dan (Komarullah, 2023).

Pada paper ini, peneliti menganalisis nilai minimum span pada beberapa kelas graf pohon. Kelas-kelas graf pohon yang dimaksud dalam paper ini adalah graf sapu, graf sapu diperumum, graf ilalang, dan graf $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$. Sebelum membahas lebih lanjut, peneliti menyajikan beberapa definisi, lemma, dan teorema yang digunakan dalam paper ini.

Definisi 1. (Wijaya & Baskoro, 2015, Operasi Identifikasi Titik)

Identifikasi titik dari graf G_1 dan G_2 pada titik-titik $u \in V(G_1)$ dan $v \in V(G_2)$ yang dilambangkan dengan $(G_1 \odot_{uv} G_2)$ menghasilkan graf G yang diperoleh dengan melekatkan titik-titik u dan v . Dengan demikian, graf G memiliki $(|V(G_1)| + |V(G_2)| - 1)$ titik dan $(|E(G_1)| + |E(G_2)|)$ sisi.

Definisi 2. (Komarullah dkk., 2022, Operasi Amalgamasi titik)

Amalgamasi dari m salinan G pada titik tetap $v_0 \in V(G)$, dinotasikan dengan $Amal(G, v_0, m)$, adalah graf yang diperoleh dari m salinan G dengan cara mengidentifikasi m salinan G pada titik tetap v_0 .

Lemma 1. (Lum, 2007)

Jika H adalah sebuah subgraf dari G , maka $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$.

Lemma 2. (Griggs & Yeh, 1992)

Misalkan S_n adalah sebuah graf bintang dengan $n \geq 2$, maka $\lambda_{2,1}(S_n) = n + 1$.

METODE

Penelitian ini tergolong penelitian eksploratif dimana hasil dari penelitian ini dimaksudkan untuk menambah wawasan baru dan memperkaya literatur khususnya dalam topik pelabelan graf. Dalam memperoleh nilai minimum span pada suatu graf, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Studi literatur melalui berbagai sumber seperti jurnal, buku atau sumber lainnya yang berkaitan dengan pelabelan $L(2,1)$.
2. Menentukan kelas graf yang akan dianalisis nilai minimum spannya, kelas graf dalam penelitian ini yaitu graf sapu, graf sapu diperumum, graf ilalang, dan graf $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$.
3. Melakukan penotasian pada titik dan sisi serta melakukan percobaan pelabelan $L(2,1)$ pada graf-graf yang telah dipilih kemudian dianalisis dengan metode deskriptif aksiomatik dan pendeteksian pola.
4. Pola-pola yang diperoleh disusun ke dalam teorema-teorema dan dibuktikan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini, penulis menyajikan teorema-teorema tentang nilai minimum dari rentang pada graf sapu, graf sapu diperumum, graf ilalang, dan $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$. Hasil dan pembahasan disajikan sebagai berikut.

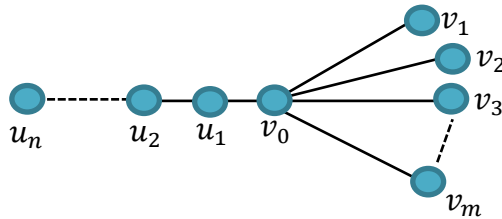
1. Graf sapu

Graf sapu dengan order $m + n$ dinotasikan dengan $Br_{n,m}$ adalah sebuah graf yang dibangun dengan mengidentifikasi titik pusat dari graf bintang S_n (titik dengan derajat terbesar) dengan salah satu titik ujung dari graf lintasan P_m . Titik dan sisi pada graf sapu $Br_{n,m}$ dinotasikan sebagai berikut.

$$V(Br_{n,m}) = \{u_i; i \in [1, n]\} \cup \{v_j; j \in [0, m]\}$$

$$E(Br_{n,m}) = \{u_i u_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{v_0 u_1, v_0 v_j; j \in [1, m]\}.$$

Ilustrasi dari graf notasi himpunan titik dan himpunan sisi pada graf sapu dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Penotasian titik dan sisi pada graf sapu Br_{nm}

Teorema 1. Misalkan $Br_{n,m}$ adalah graf sapu dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$, $\lambda_{2,1}(Br_{n,m}) = m + 2$.

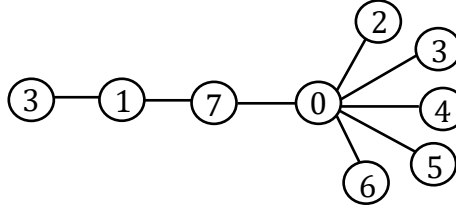
Bukti. Misalkan $Br_{n,m}$ adalah sebuah graf sapu dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$. Pertama akan dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(Br_{n,m}) \geq m + 2$. Pandang bahwa graf bintang S_{m+1} adalah subgraf dari graf sapu $Br_{n,m}$, maka berdasarkan Lemma 1, didapatkan $\lambda_{2,1}(Br_{n,m}) \geq \lambda_{2,1}(S_{m+1}) = m + 2$. Jadi, terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(Br_{n,m}) \geq m + 2$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(Br_{n,m}) \leq m + 2$ dengan mengkonstruksi pelabelan $L(2,1)$ pada graf sapu $Br_{n,m}$. Definiskan fungsi $f: V(Br_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, \dots, m + 2\}$ sebagai berikut.

$$f(v_j) = \begin{cases} 0 & ; j = 0, \\ j + 1 & ; j = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} m + 2 & ; i = 1, \\ 1 & ; i = 2, \\ 3 & ; i = 3, \\ 0 & ; i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dan } i \neq 1, \\ 2 & ; i \equiv 2 \pmod{3} \text{ dan } i \neq 2, \\ 4 & ; i \equiv 0 \pmod{3} \text{ dan } i \neq 3. \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi di atas, dapat dianalisis bahwa untuk setiap dua titik yang berjarak satu, perbedaan labelnya setidaknya dua, sementara untuk dua titik yang berjarak dua, perbedaan labelnya minimal satu. Jadi, dapat dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(Br_{n,m}) \leq m + 2$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{2,1}(Br_{n,m}) = m + 2$. ■
Gambar 2 adalah contoh pelabelan $L(2,1)$ pada graf sapu $Br_{3,5}$.



Gambar 2. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf sapu $(Br_{3,5})$

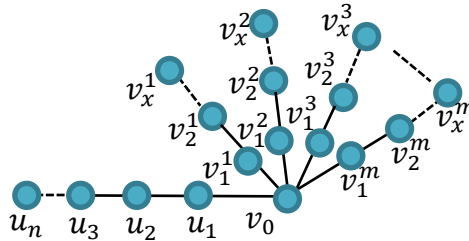
2. Graf sapu diperumum

Graf sapu diperumum (GBR_{n,m_x}) diperoleh dengan menyisipkan $x - 1$ titik pada setiap sisi v_0v_j dengan $v_0v_j \in V(Br_{n,m})$. Graf sapu diperumum isomorfis dengan graf hasil identifikasi titik dari graf lintasan (P_n) dan $Amal(P_x, v, m)$. Titik dan sisi pada graf sapu diperumum (GBR_{n,m_x}) dinotasikan sebagai berikut.

$$V(GBR_{n,m_x}) = \{u_i; i \in [1, n]\} \cup \{v_0\} \cup \{v_k^j; j \in [1, m]; k \in [1, x]\}.$$

$$E(GBR_{n,m_x}) = \{u_iu_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{v_0u_1, v_0v_1^j, v_k^jv_{k+1}^j; j \in [1, m]; k \in [1, x-1]\}.$$

Ilustrasi notasi himpunan titik dan himpunan sisi pada graf sapu diperumum dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Penotasian titik dan sisi pada graf sapu diperumum (GBR_{n,m_x})

Teorema 2. Misalkan GBR_{n,m_x} adalah graf sapu diperumum dengan $m \geq 2, n \geq 2$, dan $x \geq 2, \lambda_{2,1}(GBR_{n,m_x}) = m + 2$.

Bukti. Pertama akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(GBR_{n,m_x}) \geq m + 2$. Pandang bahwa graf sapu $Br_{n,m}$ adalah subgraf dari graf sapu diperumum, sehingga berdasarkan Lemma 1 didapatkan $\lambda_{2,1}(GBR_{n,m_x}) \geq \lambda_{2,1}(Br_{n,m}) = m + 2$. Terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(GBR_{n,m_x}) \geq m + 2$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(GBR_{n,m_x}) \leq m + 2$ dengan mengkonstruksi pelabelan $L(2,1)$ pada sebuah graf sapu diperumum. Definisikan fungsi $f: V(GBR_{n,m_x}) \rightarrow \{1, 2, \dots, m + 2\}$ sebagai berikut.

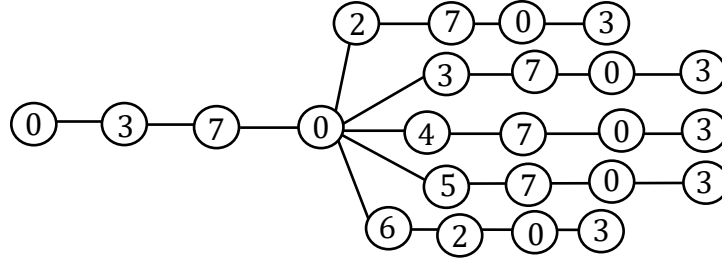
$$f(v_0) = 0$$

$$f(v_k^j) = \begin{cases} j + 1 & ; j = 1, 2, \dots, m; k = 1, \\ m + 2; j = 1, 2, \dots, m - 1; k = 2, \\ 2 & ; j = m; k = 2, \\ 0 & ; j = 1, 2, \dots, m; k \equiv 3 \pmod{4}, \\ 3 & ; j = 1, 2, \dots, m; k \equiv 0 \pmod{4}, \\ 1 & ; j = 1, 2, \dots, m; k \equiv 1 \pmod{4}; k \neq 1, \\ 4 & ; j = 1, 2, \dots, m; k \equiv 2 \pmod{4}; k \neq 2. \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} m + 2; i = 1, \\ 3 & ; i = 2, \\ 0 & ; i \equiv 0 \pmod{3}, \\ 2 & ; i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dan } i \neq 1, \\ 4 & ; i \equiv 2 \pmod{3} \text{ dan } i \neq 2. \end{cases}$$

Dengan mudah dapat dibuktikan bahwa setiap dua titik dengan jarak satu memiliki selisih label minimal dua, dan setiap dua titik pada jarak dua memiliki selisih label minimal satu. Jadi, terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(GBR_{n,m_x}) \leq m + 2$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{2,1}(GBR_{n,m_x}) = m + 2$. ■

Gambar 4 adalah contoh dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf sapu diperumum.



Gambar 4. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf sapu diperumum ($GBr_{3,5_4}$)

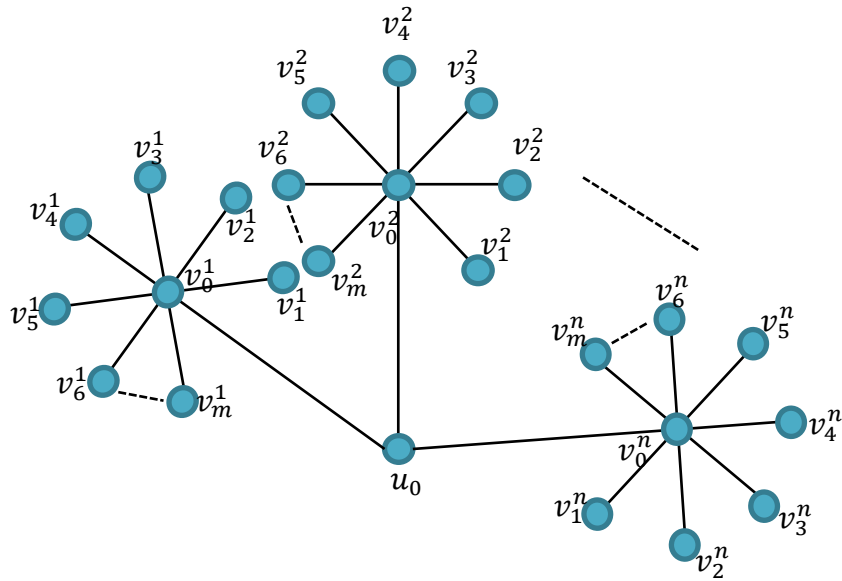
3. Graf Ilalang

Graf ilalang $S_{n,m}$ adalah sebuah graf yang dibangun dari operasi penggabungan m salinan graf bintang yang diidentifikasi pada titik yang berderajat satu. Titik dan sisi pada graf ilalang $S_{n,m}$ dinotasikan sebagai berikut.

$$V(S_{n,m}) = \{u_0\} \cup \{v_i^j; i \in [0, m]; j \in [1, n]\}$$

$$E(S_{n,m}) = \{u_0 v_0^j; j \in [1, n]\} \cup \{v_0^j v_i^k; k = j; j \in [1, n]; i \in [1, m]\}.$$

Sebagai ilustrasi dari notasi himpunan titik dan himpunan sisi pada graf ilalang dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Penotasian titik dan sisi pada graf ilalang $S_{n,m}$

Teorema 3. Misalkan $S_{n,m}$ adalah graf ilalang dengan $n \geq 2$ dan $m \leq n - 2$, $\lambda_{2,1}(S_{n,m}) = n + 1$.

Bukti. Perhatikan bahwa graf bintang adalah subgraf dari graf ilalang, sehingga berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh $\lambda_{2,1}(S_{n,m}) \geq \lambda_{2,1}(S_n) = n + 1$. Terbukti bahwa batas bawah dari nilai minimum span pada graf jerami $S_{n,m}$ dengan $n \geq 2$ dan $m \leq n - 2$ adalah $n + 1$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(S_{n,m}) \leq n + 1$ dengan mengkonstruksi pelabelan $L(2,1)$ pada graf ilalang.

Definisikan Misalkan $f: V(S_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, \dots, n + 1\}$ sebagai berikut.

$$f(u_0) = n + 1$$

$$f(v_0^j) = j - 1; j = 1, 2, \dots, n$$

untuk $j = 1$ dan $j = 2$

$$f(v_i^j) = j + i; i = 1, 2, \dots, m$$

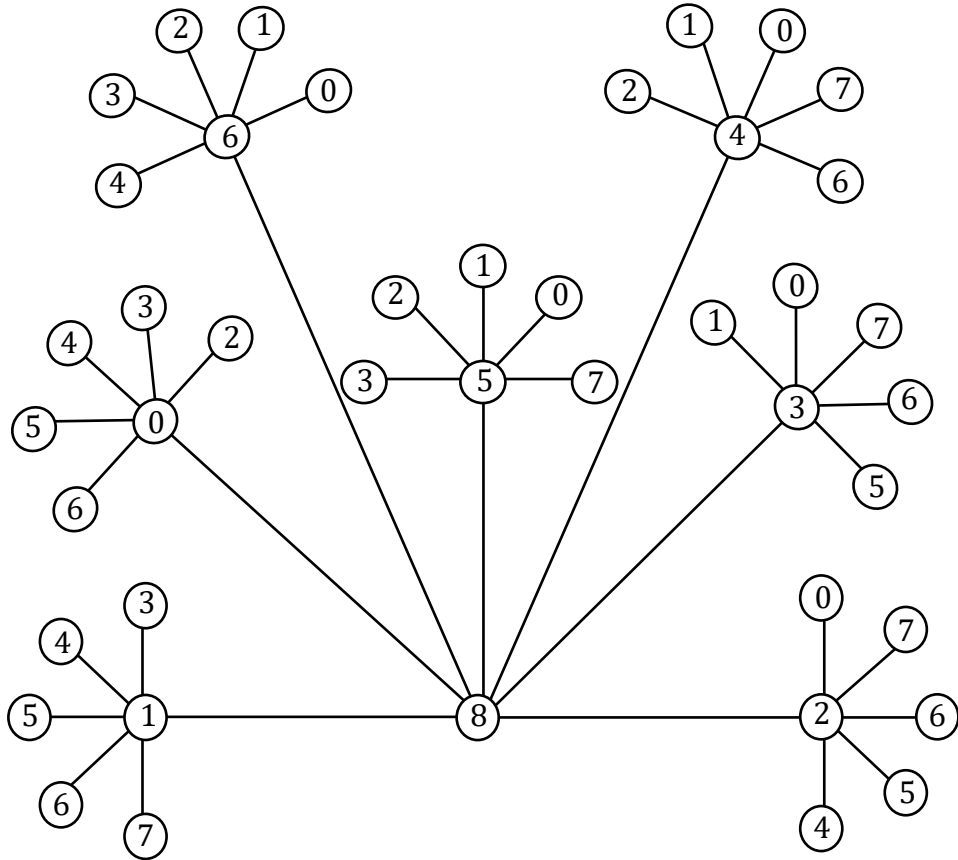
Untuk $j = 3, 4, \dots, n$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} j + i & ; i = 1, 2, \dots, m - j + 2, \\ i + j - (n + i) & ; i = m - j + 3, m - j + 4, \dots, m. \end{cases}$$

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa fungsi tersebut memenuhi kaidah pelabelan $L(2,1)$. Jadi, $\lambda_{2,1}(S_{n,m}) \leq n + 1$.

Karena $\lambda_{2,1}(S_{n,m}) \geq n + 1$ dan $\lambda_{2,1}(S_{n,m}) \leq n + 1$, maka $\lambda_{2,1}(S_{n,m}) = n + 1$. ■

Gambar 6 adalah contoh pelabelan $L(2,1)$ pada graf ilalang.



Gambar 6. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf ilalang ($S_{7,5}$)

Pada graf ilalang $S_{n,m}$ peneliti belum mendapat fungsi pelabelan untuk $m > n + 2$.

Masalah Terbuka. Tentukan nilai minimum span pada graf ilalang $S_{n,m}$ dengan $n \geq 2$ dan $m \leq n - 2$.

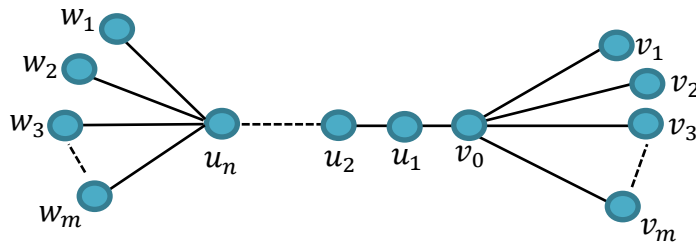
4. Graf $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$

Graf $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$ adalah graf hasil identifikasi titik dari graf sapu $Br_{n,m}$ dan graf bintang S_m dengan menempelkan titik pusat graf bintang pada titik $u_n \in Br_{n,m}$. Titik dan sisi pada graf $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$ dinotasikan sebagai berikut.

$$V(Br_{n,m}) = \{u_i; i \in [1, n]\} \cup \{v_j, w_k; j, k \in [1, m]\}.$$

$$E(Br_{n,m}) = \{u_i u_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{u_1 v_j, u_n w_k; j, k \in [1, m]\}.$$

Ilustrasi notasi himpunan titik dan himpunan sisi pada graf $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$ dapat dilihat pada Gambar 7.



Gambar 7. Penotasian titik dan sisi pada graf $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$

Teorema 4. Untuk setiap $n \geq 4$ dan $m \geq 2$, $\lambda_{2,1}(Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m) = m + 2$.

Bukti. Perhatikan bahwa graf sapu adalah subgraf dari graf $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$. Berdasarkan Lemma 1 diperoleh $\lambda_{2,1}(Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m) \geq \lambda_{2,1}(Br_{n,m}) = m + 2$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m) \leq m + 2$ dengan mengkonstruksi pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$. Definisikan $f: V(Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m) \rightarrow \{1, 2, \dots, m + 2\}$ sebagai berikut.

$$f(v_j) = \begin{cases} 0 & ; j = 0, \\ j + 1 & ; j = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Kasus $n \equiv 1 \pmod 3$

$$f(u_i) = \begin{cases} m+2; i=1, \\ 1 & ; i=2, \\ 3 & ; i=3, \\ 0 & ; i \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } i \neq 1, \\ 2 & ; i \equiv 2 \pmod 3 \text{ dan } i \neq 2, \\ 4 & ; i \equiv 0 \pmod 3 \text{ dan } i \neq 3. \end{cases}$$

$$f(w_k) = \begin{cases} m+2 & ; k=2, \\ k+1 & ; k=1,3,4,\dots,m. \end{cases}$$

Kasus $n \equiv 2 \pmod 3$

$$f(u_i) = \begin{cases} m+2; i=1, n \\ 1 & ; i=2, \\ 3 & ; i=3, \\ 0 & ; i \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } i \neq 1, \\ 2 & ; i \equiv 2 \pmod 3, i \neq 2, \text{ dan } i \neq n \\ 4 & ; i \equiv 0 \pmod 3 \text{ dan } i \neq 3, \end{cases}$$

$$f(w_k) = k; k=1,2,\dots,m.$$

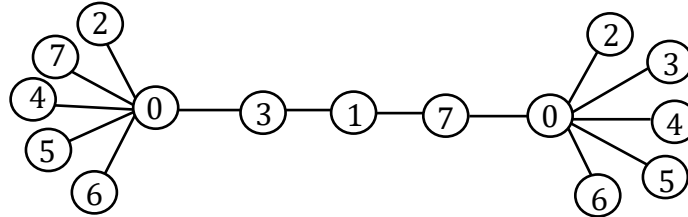
Kasus $n \equiv 0 \pmod 3$

$$f(u_i) = \begin{cases} m+2; i=1, n, \\ 1 & ; i=2, \\ 3 & ; i=3, \\ 0 & ; i \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } i \neq 1, \\ 2 & ; i \equiv 2 \pmod 3 \text{ dan } i \neq 2, \\ 4 & ; i \equiv 0 \pmod 3, i \neq 3, \text{ dan } i \neq n. \end{cases}$$

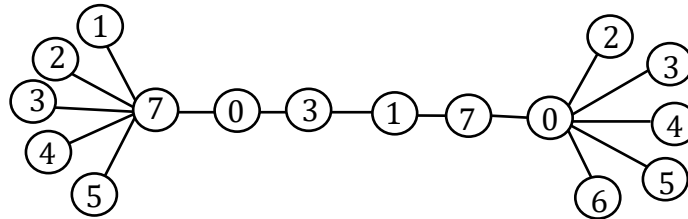
$$f(w_k) = \begin{cases} k-1 & ; k=1,2, \\ k+1 & ; k=3,4,\dots,m. \end{cases}$$

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan $L(2,1)$, sehingga $\lambda_{2,1}(Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m) \leq m+2$. Terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m) = m+2$. ■

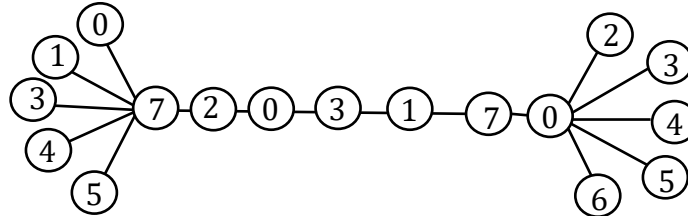
Sebagai contoh dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$ dapat dilihat pada Gambar 8, Gambar 9, dan Gambar 10.



Gambar 8. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Br_{4,5} \odot_{v_0 u_4} S_5$



Gambar 9. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Br_{5,5} \odot_{v_0 u_5} S_5$



Gambar 10. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Br_{6,5} \odot_{v_0 u_6} S_5$

Gambar 8 merupakan contoh pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$ untuk $n \equiv 1 \pmod 3$. Gambar 9 merupakan contoh pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$ untuk $n \equiv 2 \pmod 3$. Gambar 10 merupakan contoh pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$ untuk $n \equiv 0 \pmod 3$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, didapatkan bahwa nilai minimum span pada graf sapu $Br_{n,m}$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ dan graf sapu diperumum $GBr_{n,m,x}$ dengan $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $x \geq 2$ masing-masing sama dengan $m + 2$. Nilai minimum span pada graf ilalang $S_{n,m}$ dengan $n \geq 2$ dan $m \leq n - 2$ adalah $n + 1$. Nilai minimum span pada graf $Br_{n,m} \odot_{v_0 u_n} S_m$ adalah $m + 2$. Saran untuk penelitian selanjutnya yakni, menganalisis nilai minimum span pada graf ilalang $S_{n,m}$ dengan $m > n - 2$ atau pada kelas graf lain yang belum diteliti.

DAFTAR PUSTAKA

- Ali, A., Chartrand, G., & Zhang, P. (2021). *Irregularity in graphs*. Springer International Publishing, Berlin.
- Aminulloh, M., & Afif, R. (2019). *Minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi $L(2, 1)$ pada graf Petersen $P(n, 1)$* (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).
- Budayasa, K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Unesa University Press, Surabaya.
- Fatimah, S., Sudarsana, I. W., & Musdalifah, S. (2016). Pelabelan $L(2, 1)$ pada Operasi Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 13(2). <https://core.ac.uk/reader/290089130>
- Gallian, J. A. (2022). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 6(25), 4-623. Article DS6. <https://doi.org/10.37236/11668>
- Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4), 586-595. <https://doi.org/10.1137/0405048>
- Hale, W. K. (1980). Frequency assignment: Theory and applications. *Proceedings of the IEEE*, 68(12), 1497-1514. <https://doi.org/10.1109/PROC.1980.11899>
- Halikin, I., & Komarullah, H. (2022, February). Labelling of Generalized Friendship, Windmill, and Torch Graphs with a Condition at Distance Two. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 35-39). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.008>
- Julaeha, S., Luspitasari, I., & Sukaesih, E. (2017). Pelabelan Total Tak Teratur Total pada Graf Bunga. *Jurnal Istek*, 10(1), 83-101. <https://journal.uinsgd.ac.id/index.php/istek/article/view/1458/1021>
- Komarullah, H. (2023, December). Nilai Minimum Span pada Graf Gurita, Graf Siput, dan Graf Ubur-Ubur. In *Prosiding Galuh Mathematics National Conference* (Vol. 3, No. 1, pp. 56-62). <https://jurnal.unigal.ac.id/GAMMA-NC/article/view/12952/6999>
- Komarullah, H., Halikin, I., & Santoso, K. A. (2022, February). On the minimum span of cone, tadpole, and barbell graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 40-43). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.009>
- Komarullah, H., Slamin, & Wijaya, K. (2022, February). A Minimum Coprime Number for Amalgamation of Wheel. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 53-57). Atlantis Press. <https://doi.org/doi:10.2991/acsr.k.220202.012>
- Kumar, A., & Vats, A. K. (2020). Application of graph Labeling in Crystallography. *Proc. Mater. Today*, 1-5. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.09.371>
- Lum, A. (2007). Upper Bound on $L(2,1)$ -labelling Number of Graphs with Maximum Degree Δ . Retrieved from <https://www.whitman.edu/documents/academics/mathematics/lumaa.pdf>
- Prasanna, N. L., Sravanthi, K., & Sudhakar, N. (2014). Applications of graph labeling in communication networks. *Oriental Journal of Computer Science and Technology*, 7(1), 139-145. <http://www.computerscijournal.org/pdf/vol7no1/OJCSV07I1P139-145.pdf>
- Prihandoko, A. C., Dafik, D., & Agustin, I. H. (2019). Implementation of super H-antimagic total graph on establishing stream cipher. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 3(1), 14-23. <http://dx.doi.org/10.19184/ijc.2019.3.1.2>
- Sagala, Y., & Susiana. (2017). Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Sierpinski $S(n,k)$. *Karismatika*, 3(2), 130-139.

- Shao, Z., Yeh, R. K., & Zhang, D. (2008). The $L(2, 1)$ -labeling on graphs and the frequency assignment problem. *Applied Mathematics Letters*, 21(1), 37-41. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.08.029>
- Umam, I. A. I., Halikin, I., & Fatekurohman, M. (2022, February). $L(2, 1)$ Labeling of Lollipop and Pendulum Graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 44-47). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.010>
- Vinutha, M. S., & Arathi, P. (2017). Applications of graph coloring and labeling in computer science. *International Journal on Future Revolution in Computer Science and Communication Engineering*, 3(8), 14-16.
- Wijaya, K., & Baskoro, E. T. (2016). On Ramsey $(2K_2, 2H)(2K_2, 2H)$ -Minimal Graphs. In *Applied Analysis in Biological and Physical Sciences: ICMBAA, Aligarh, India, June 2015* (pp. 219-225). Springer India.
- Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. Birkhauser. Boston.