

Pelabelan Jumlah Ganjil-Genap pada Beberapa Graf Pohon

Hafif Komarullah¹, Maura Delva Saputri², Dwi Margi Utami³

Universitas Al Falah As Sunniyah, Indonesia

E-mail: hafififa4@gmail.com

Abstrak— Teori graf merupakan salah satu topik matematika yang terus berkembang hingga saat ini, salah satu topik yang dikembangkan adalah pelabelan graf. Pelabelan graf memiliki banyak terapan dalam kehidupan sehari-hari, seperti penentuan frekuensi radio, kriptografi, kristalografi, jaringan komunikasi, dan komputer sains. Hingga saat ini pelabelan graf terdiri dari berbagai jenis seperti pelabelan $L(2,1)$, pelabelan prima, dan pelabelan jumlah ganjil-genap. graf $G(V, E)$ dengan order p dan ukuran q dikatakan graf jumlah ganjil-genap jika terdapat fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (2p-1)\}$ sedemikian sehingga fungsi sisi terinduksi $f^*: E(G) \rightarrow \{2, 4, \dots, 2q\}$ yang didefinisikan oleh fungsi $f^*(uv) = f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$ merupakan fungsi bijektif. Dalam penelitian ini, peneliti menunjukkan bahwa graf sapu, graf sisir, graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen, dan graf hasil identifikasi titik graf sapu dan graf lintasan merupakan graf jumlah ganjil-genap. Dalam menunjukkan graf sapu, graf sisir, graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen, dan graf hasil identifikasi titik graf sapu dan graf lintasan merupakan graf jumlah ganjil-genap, peneliti menggunakan metode deskriptif aksiomatik dan metode pendeteksian pola.

Kata kunci: Pelabelan graf, pelabelan jumlah ganjil-genap, graf pohon.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang terus berkembang hingga saat ini. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 (Marr & Denis, 2013). Euler menggunakan teori ini untuk menyelesaikan masalah Jembatan Konisberg dengan membuktikan bahwa setiap orang tidak dapat melewati setiap jembatan tepat sekali jika mereka ingin melaluinya dan kembali ke tempat awal pemberangkatan mereka. Dalam memecahkan permasalahan Jembatan Konisberg, Leonhard Euler merepresentasikan daratan dengan titik dan jembatan dengan sisi (Manolopoulos, 2024).

Secara matematis graf biasanya dinotasikan $G(V(G), E(G))$ yaitu pasangan himpunan tak kosong $V(G)$ yang disebut dengan titik dan himpunan sisi $E(G)$ yang boleh kosong dari pasangan tak terurut titik-titik dalam $V(G)$ (Chartrand, 1977). Teori graf terus berkembang hingga saat ini, salah satunya adalah topik pelabelan graf yang pertama kali dikenalkan pada tahun 60-an. Pelabelan graf merupakan pemetaan anggota-anggota graf ke bilangan bulat dengan syarat-syarat tertentu (Gallian, 2022). Selama bertahun-tahun, lebih dari 200 jenis pelabelan graf telah dikembangkan (Komarullah dkk., 2022). Pelabelan graf memiliki banyak terapan dalam kehidupan sehari-hari, seperti penentuan frekuensi radio (Griggs & Yeh, 1992), kriptografi (Prihandoko dkk., 2019), kristalografi (Kumar & Vats, 2020), jaringan komunikasi (Prasanna dkk., 2014), komputer sains (Vinutha & Arathi, 2017), dan jaringan biologi (Pavlopoulos dkk., 2011).

Berdasarkan domainnya, pelabelan graf dibagi menjadi tiga yaitu pelabelan titik (domain berupa titik), pelabelan sisi (domain berupa sisi), dan pelabelan total (domain berupa titik dan sisi). Contoh dari pelabelan titik adalah pelabelan $L(2,1)$ (Griggs & Yeh, 1992), pelabelan koprima (Berliner dkk., 2016), pelabelan jumlah ganjil-genap, dan lain-lain. Contoh pelabelan sisi adalah pelabelan sisi relatif prima (Janani & Ramachandran, 2022), pelabelan sisi koprima (Janani & Ramachandran, 2023), dan lain-lain. Pelabelan jumlah ganjil-genap merupakan jenis pelabelan total yang diperkenalkan oleh Monika & Murugan (2017). Misalkan sebarang graf $G = (V, E)$ dengan $|V(G)| = p$ yang disebut order dan $|E(G)| = q$ yang disebut ukuran. Pelabelan jumlah ganjil-genap didefinisikan oleh fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (2p-1)\}$ sedemikian sehingga fungsi sisi terinduksi $f^*: E(G) \rightarrow \{2, 4, \dots, 2q\}$ yang didefinisikan oleh fungsi $f^*(uv) = f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$ merupakan fungsi bijektif (Monika & Murugan, 2017). Graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan jumlah ganjil-genap disebut graf jumlah ganjil-genap. Pelabelan jumlah ganjil-genap hanya dapat diterapkan pada graf tidak berarah, graf sederhana (graf yang tidak memuat sisi ganda), dan graf berhingga (graf yang memiliki titik dan sisi berhingga) (Monika & Murugan, 2017). Sisi ganda graf adalah dua atau lebih sisi yang menghubungkan dua titik yang sama (Wallis, 2001).

Beberapa peneliti terdahulu telah melakukan penelitian pelabelan jumlah ganjil-genap pada beberapa kelas graf. Monika & Murugan (2017) menunjukkan bahwa graf lintasan (P_n), graf bintang ($S_{1,n}$), graf bistar ($B_{m,k}$), dan graf pohon kelapa merupakan graf jumlah ganjil-genap. Monika & Murugan (2018) menunjukkan beberapa graf hasil duplikasi dari graf roda dan graf lintasan merupakan graf jumlah ganjil-genap. Kaneria dkk. (2018) menunjukkan bahwa graf siklus C_n dengan $n \equiv 0 \pmod 4$, graf $K_{m,n}$, graf grid, graf caterpillar, dan graf splitting adalah graf jumlah ganjil-genap. Nurhakim & Harianto (2020) menunjukkan bahwa graf jellyfish dan graf mushroom juga merupakan graf jumlah ganjil-genap. Monika & Murugan (2021) menunjukkan bahwa beberapa graf tak terhubung merupakan graf jumlah ganjil-genap. Hasil lain dapat dilihat pada (Monika dkk., 2022).

Berdasarkan penelitian sebelumnya, dalam penelitian ini dianalisis pelabelan jumlah ganjil-genap pada beberapa kelas graf pohon (graf tidak memuat siklus), graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen, dan graf hasil identifikasi titik graf sapu dan graf lintasan. Identifikasi titik dari graf G dan H pada titik $x \in V(G)$ dan $y \in V(H)$ dinotasikan dengan $(G \odot_{xy} H)$ menghasilkan graf baru yang didapat dengan menempelkan titik x dan y sedemikian sehingga graf baru tersebut memiliki $(|V(G)| + |V(H)| - 1)$ titik dan $(|E(G)| + |E(H)|)$ sisi (Borowiecka-Olszewska dan Hałuszczak, 2013). Dalam penelitian

ini graf pohon yang dimaksud adalah graf sapu dan graf sisir, sedangkan graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen diperoleh dengan menempelkan salah satu titik anting (titik berderajat satu) dari masing-masing graf bintang sehingga menghasilkan graf $(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n})$. Graf hasil identifikasi titik graf sapu dan graf lintasan diperoleh dengan menempelkan titik u_1 pada graf sapu dan titik w_1 pada graf lintasan. Graf lintasan dinotasikan dengan P_n adalah graf terhubung sederhana yang dibangun oleh n titik dalam satu lintasan dengan panjang $n - 1$ (Hartsfield & Ringel, 2003).

METODE

Penelitian ini dikategorikan sebagai penelitian eksploratif yang bertujuan untuk mengembangkan pengetahuan baru dan memperluas literatur terkait dengan pelabelan graf, terutama pelebelan jumlah ganjil-genap. Dalam mendapatkan fungsi pelabelan jumlah ganjil-genap digunakan beberapa metode berikut.

1. Deskriptif aksiomatik yaitu dengan mengkaji definisi, lemma, atau teorema sebelumnya terkait dengan pelabelan jumlah ganjil-genap.
2. Pendeteksian pola yaitu dengan menganalisis pola pelabelan dari order tertentu untuk menentukan fungsi pelabelan jumlah ganjil-genap secara umum dari graf yang diteliti.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dipaparkan hasil dan pembahasan tentang pelabelan jumlah ganjil genap pada graf sapu, graf sisir, graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen, dan graf hasil identifikasi titik graf sapu dan graf lintasan.

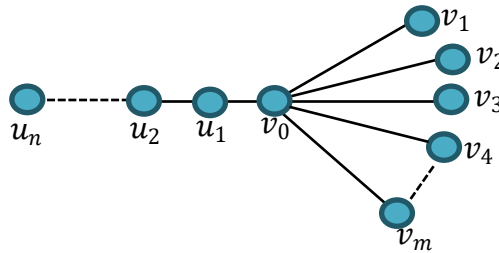
1. Graf sapu

Graf sapu dinotasikan dengan $Br_{n,m}$ merupakan graf berorder $m + n + 1$ dan ukuran $m + n$ yang dibangun dari hasil identifikasi graf lintasan P_{n+1} dan graf bintang $S_{1,m}$ dengan menempelkan titik pusat graf bintang (titik berderajat terbesar) ke salah satu titik ujung pada graf lintasan (Ghosh dan Pal, 2015). Penotasian titik dan sisi pada graf sapu sebagai berikut.

$$V(Br_{n,m}) = \{u_i; i \in [1, n]\} \cup \{v_j; j \in [0, m]\}.$$

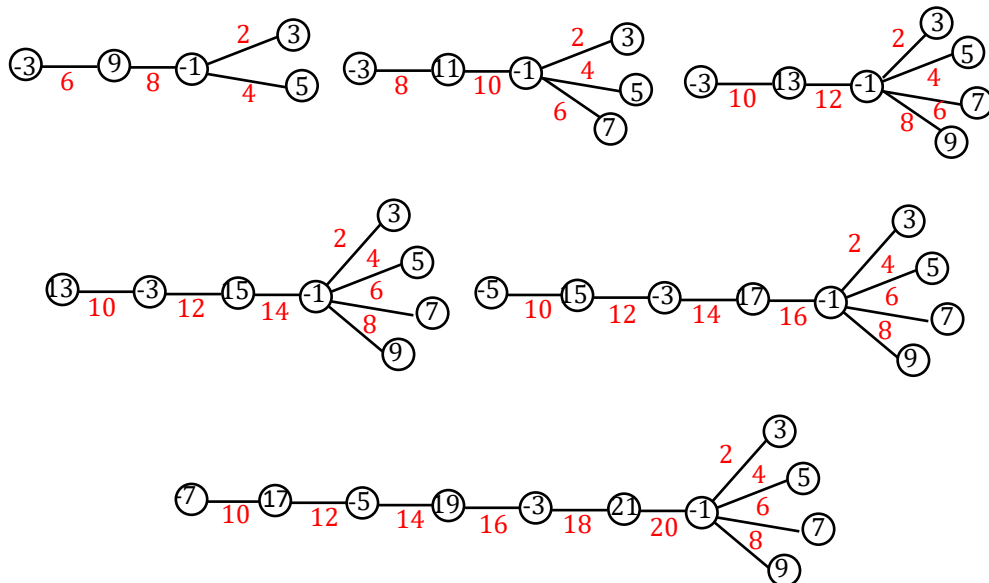
$$E(Br_{n,m}) = \{u_i u_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{v_0 u_1, v_0 v_j; j \in [1, m]\}.$$

Ilustrasi graf sapu dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Penotasian titik dan sisi pada graf sapu $Br_{n,m}$

Untuk mendapatkan fungsi pelabelan jumlah ganjil-genap pada graf sapu $Br_{n,m}$ dilakukan dengan cara mencoba melabeli graf sapu dengan order tertentu. Dalam hal ini dilakukan percobaan pada graf sapu $Br_{2,2}$, $Br_{2,3}$, $Br_{2,4}$, $Br_{3,4}$, $Br_{4,4}$, dan $Br_{6,4}$. Sebagai contoh pendeteksian pola, dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Proses pendeteksian pola pelabelan jumlah ganjil-genap pada graf sapu

Berdasarkan pendeteksian pola di atas, maka diperoleh sebuah teorema sebagai berikut.

Teorema 1. Untuk setiap $m \geq 2$ dan $n \geq 2$, graf sapu $(Br_{n,m})$ merupakan graf jumlah ganjil-genap.

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa graf sapu $(Br_{n,m})$ merupakan graf jumlah ganjil-genap yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan jumlah ganjil-genap. Misalkan order dari graf $Br_{n,m}$ dinotasikan dengan p , maka fungsi injektif $f: V(Br_{n,m}) \rightarrow \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (2p - 1)\}$ sebagai berikut.

$$f(v_j) = \begin{cases} -1 & ; j = 0, \\ 2j + 1 & ; j = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 2p - i & ; i \text{ ganjil}, \\ -(i + 1) & ; i \text{ genap}. \end{cases}$$

Jika f^* merupakan pelabelan sisi yang diinduksi dari f , maka

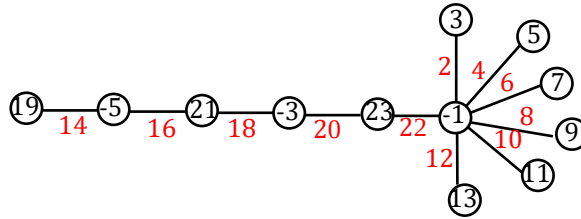
$$f^*(v_0 v_j) = 2j; j = 1, 2, \dots, m.$$

$$f^*(v_0 u_1) = 2(p - 1).$$

$$f^*(u_i u_{i+1}) = 2(p - i - 1); i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Dengan mudah dapat diidentifikasi bahwa fungsi f dan f^* memenuhi kaidah pelabelan jumlah ganjil-genap. Terbukti bahwa graf sapu $Br_{n,m}$ merupakan graf jumlah ganjil-genap. ■

Untuk memperjelas Teorema 1, diberikan contoh pelabelan jumlah ganjil-genap pada graf sapu $Br_{5,6}$ yang dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Pelabelan jumlah ganjil-genap pada graf sapu $Br_{5,6}$

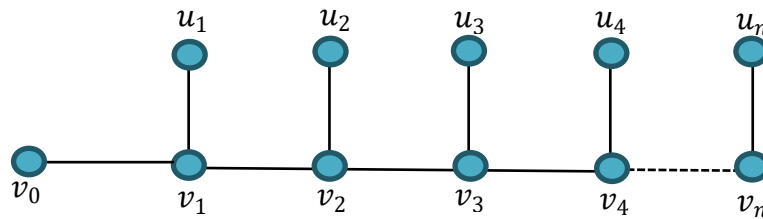
2. Graf sisir (comb)

Graf sisir dinotasikan dengan Cb_n adalah graf berorder $2n + 1$ yang dibangun dari identifikasi titik graf lintasan P_2 dan graf ulat teratur berderajat dua yang secara matematis ditulis dengan $P_2 \odot_{u_0 v_1} C_{4,1}$. Identifikasi titik dilakukan dengan menempelkan salah satu titik P_2 dengan salah satu titik berderajat dua pada graf ulat teratur $C_{4,1}$ (Dhanalakshmi dan Parvathi, 2018). Penotasian titik dan sisi pada graf sisir sebagai berikut.

$$V(Cb_n) = \{v_0\} \cup \{u_i; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_j; j = 1, 2, \dots, n\}.$$

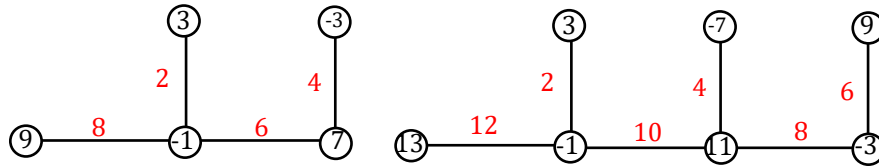
$$E(Cb_n) = \{v_0 v_1\} \cup \{v_j v_{j+1}; j \in [1, n - 1]\} \cup \{u_i v_j; i = j; i, j \in [1, n]\}.$$

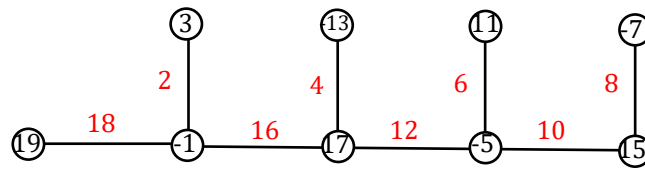
Ilustrasi graf sisir Cb_n dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4. Penotasian titik dan sisi pada graf sisir Cb_n

Untuk mendapatkan fungsi pelabelan jumlah ganjil-genap pada graf sisir Cb_n dilakukan dengan cara mencoba melabeli graf sisir dengan order tertentu. Dalam hal ini dilakukan percobaan pada graf sisir Cb_n dengan $n = 2$, $n = 3$, dan $n = 4$. Sebagai contoh pendeteksian pola pada graf sisir, dapat dilihat pada Gambar 5.





Gambar 5. Proses pendeteksian pola pelabelan jumlah ganjil-genap pada graf sisir

Berdasarkan pendeteksian pola di atas, maka diperoleh sebuah teorema sebagai berikut.

Teorema 2. Untuk setiap $n \geq 2$, graf sisir (Cb_n) merupakan graf jumlah ganjil-genap.

Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf sisir (Cb_n) merupakan graf jumlah ganjil-genap yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan jumlah ganjil-genap. Misalkan order dari graf Cb_n dinotasikan dengan p , maka fungsi injektif $f: V(Cb_n) \rightarrow \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (2p - 1)\}$ sebagai berikut.

$$f(v_j) = \begin{cases} -j & ; j \text{ ganjil,} \\ 2p - j - 1 & ; j \text{ genap.} \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 3i & ; i \text{ ganjil,} \\ 3i - 2p + 1 & ; i \text{ genap.} \end{cases}$$

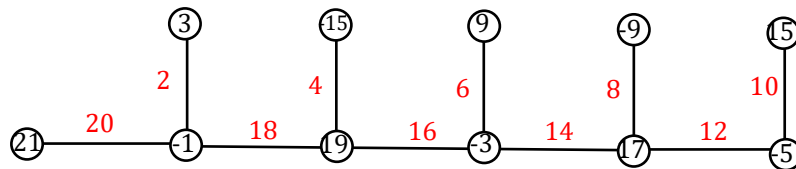
Jika f^* merupakan pelabelan sisi yang diinduksi dari f , maka

$$f^*(u_i v_j) = 2j; i = j.$$

$$f^*(v_j v_{j+1}) = 2(p - j - 1); j = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Dapat ditunjukkan bahwa fungsi f dan f^* memenuhi kaidah pelabelan jumlah ganjil-genap. Terbukti bahwa graf sisir (Cb_n) merupakan graf jumlah ganjil-genap. ■

Sebagai contoh, Gambar 6 adalah pelabelan jumlah ganjil-genap pada graf sisir Cb_5 .



Gambar 6. Pelabelan jumlah ganjil-genap pada graf sisir Cb_5

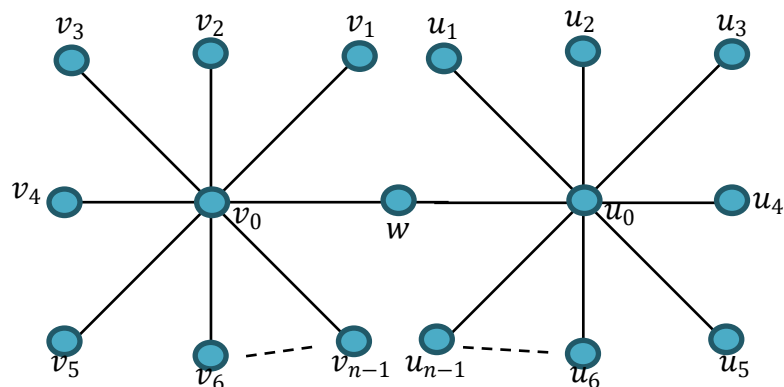
3. Graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen

Graf bintang $S_{1,n}$ adalah graf terhubung sederhana berorder $n + 1$ yang dibangun dengan menduplikasi graf lintasan P_2 sebanyak n kali dan selanjutnya menempelkan salah satu ujung dari setiap graf lintasan P_2 menjadi satu. Graf bintang $S_{1,n}$ memiliki n titik berderajat 1 dan satu titik berderajat n (Latifi, 2007). Graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen diperoleh dengan menempelkan salah satu titik anting (titik berderajat satu) dari masing-masing graf bintang sehingga menghasilkan graf $(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n})$. Penotasian titik dan sisi pada graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen $(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n})$ sebagai berikut.

$$V(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}) = \{v_i; i = 0, 1, \dots, n - 1\} \cup \{w\} \cup \{u_j; j = 0, 1, \dots, n - 1\}.$$

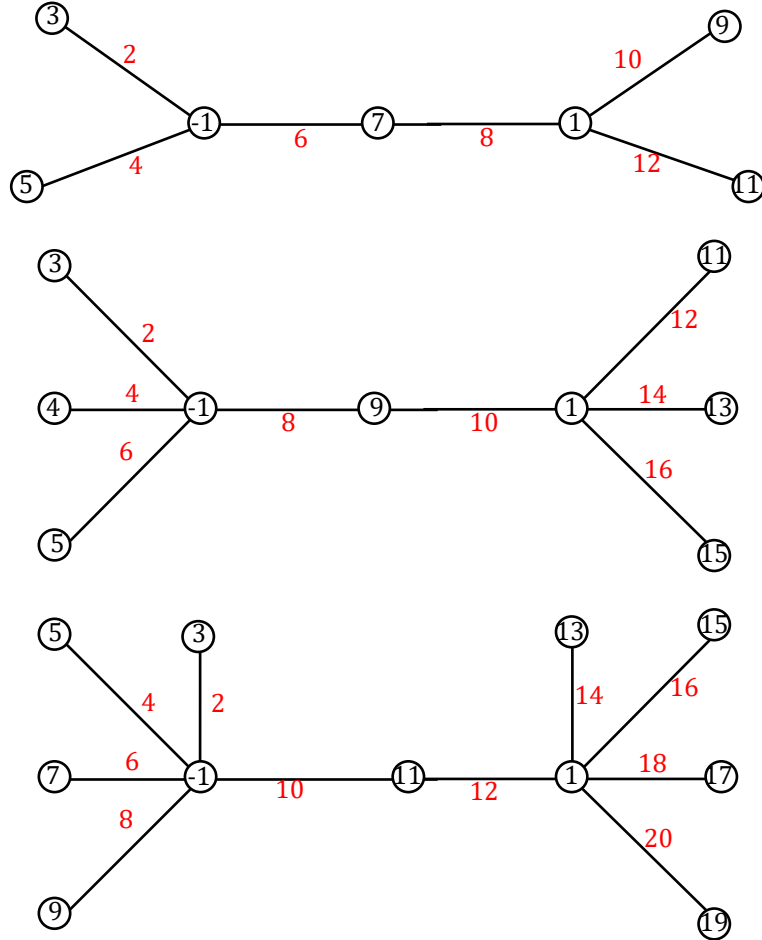
$$E(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n}) = \{v_0 w, v_0 v_i; i = 0, 1, \dots, n - 1\} \cup \{u_0 w, u_0 u_j; j = 0, 1, \dots, n - 1\}.$$

Ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen $(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n})$ dapat dilihat pada Gambar 7.



Gambar 7. Penotasian titik dan sisi graf $(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n})$

Untuk mendapatkan fungsi pelabelan jumlah ganjil-genap pada graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen $(S_{1,n} \odot_{u_nv_n} S_{1,n})$ dilakukan dengan cara mencoba melabeli graf tersebut dengan order tertentu. Dalam hal ini metode pendeteksian pola pada graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen $(S_{1,n} \odot_{u_nv_n} S_{1,n})$ dilakukan pada $n = 2, n = 3$, dan $n = 4$. Sebagai contoh pendeteksian pola pada graf $S_{1,n} \odot_{u_nv_n} S_{1,n}$, dapat dilihat pada Gambar 8.



Gambar 8. Proses pendeteksian pola pelabelan jumlah ganjil-genap pada graf $S_{1,n} \odot_{u_nv_n} S_{1,n}$

Berdasarkan pendeteksian pola di atas, maka diperoleh sebuah teorema sebagai berikut.

Teorema 3. Untuk setiap $n \geq 3$, graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen $(S_{1,n} \odot_{u_nv_n} S_{1,n})$ merupakan graf jumlah ganjil-genap.

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen $(S_{1,n} \odot_{u_nv_n} S_{1,n})$ merupakan graf jumlah ganjil-genap yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan jumlah ganjil-genap. Misalkan order dari graf $(S_{1,n} \odot_{u_nv_n} S_{1,n})$ dinotasikan dengan p , maka fungsi injektif $f: V(Br_{n,m}) \rightarrow \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (4n + 1)\}$ sebagai berikut.

$$f(v_i) = \begin{cases} -1 & ; i = 0, \\ 2i + 1; & i = 1, 2, \dots, n - 1. \end{cases}$$

$$f(w) = 2n + 1$$

$$f(u_j) = \begin{cases} 1 & ; j = 0, \\ 2(n + j) + 1; & j = 1, 2, \dots, n - 1. \end{cases}$$

Jika f^* merupakan pelabelan sisi yang diinduksi dari f , maka

$$f^*(v_0 v_i) = 2i; i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

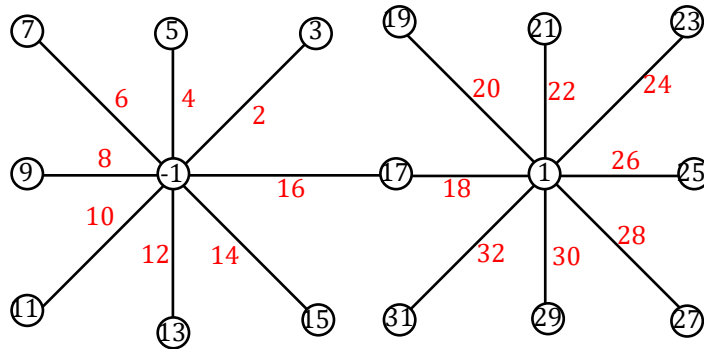
$$f^*(v_0 w) = 2n$$

$$f^*(u_0 w) = 2n + 2$$

$$f^*(u_0 u_j) = 2(n + j + 1); j = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Dapat diidentifikasi bahwa fungsi f dan f^* memenuhi kaidah pelabelan jumlah ganjil-genap. Terbukti bahwa graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen $(S_{1,n} \odot_{u_nv_n} S_{1,n})$ adalah graf jumlah ganjil-genap. ■

Contoh pelabelan ganjil-genap pada graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen $(S_{1,n} \odot_{u_n v_n} S_{1,n})$ dapat dilihat pada Gambar 7.



Gambar 9. Pelabelan jumlah ganjil-genap pada graf $(S_{1,8} \odot_{u_8 v_8} S_{1,8})$

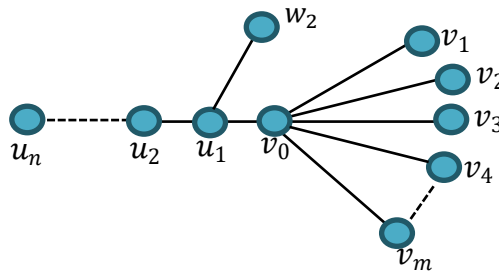
4. Graf hasil identifikasi titik graf sapu dan graf lintasan $Br_{n,m} \odot_{u_1 w_1} P_2$

Misalkan titik u_1 pada graf sapu $Br_{n,m}$ diidentifikasi dengan salah satu titik pada graf lintasan P_2 , maka akan menghasilkan graf $Br_{n,m} \odot_{u_1 w_1} P_2$. Penotasian titik dan sisi pada graf $Br_{n,m} \odot_{u_1 w_1} P_2$ sebagai berikut.

$$V(Br_{n,m} \odot_{u_1 w_1} P_2) = \{u_i; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{w_2\} \cup \{v_j; j = 1, 2, \dots, m\}.$$

$$E(Br_{n,m} \odot_{u_1 w_1} P_2) = \{u_1 v_0, u_1 w_2, u_i u_{i+1}; i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{v_0 v_j; j = 1, 2, \dots, m\}.$$

Contoh graf $Br_{n,m} \odot_{u_1 w_1} P_2$ dapat dilihat pada Gambar 10.



Gambar 10. Graf hasil identifikasi titik graf sapu dan graf lintasan $Br_{n,m} \odot_{u_1 w_1} P_2$

Dengan cara yang sama, melalui metode pendeteksian pola pada graf hasil identifikasi titik graf sapu dan graf lintasan $Br_{n,m} \odot_{u_1 w_1} P_2$ dengan n dan m tertentu didapatkan sebuah teorema sebagai berikut.

Teorema 4. Untuk setiap $m \geq 2$ dan $n \geq 2$, graf hasil identifikasi titik graf sapu dan graf lintasan $Br_{n,m} \odot_{u_1 w_1} P_2$ merupakan graf jumlah ganjil-genap.

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa graf $Br_{n,m} \odot_{u_1 w_1} P_2$ merupakan graf jumlah ganjil-genap yaitu dengan membangun fungsi pelabelan yang memenuhi kaidah pelabelan jumlah ganjil-genap. Misalkan order dari graf $Br_{n,m} \odot_{u_1 w_1} P_2$ dinotasikan dengan p , maka fungsi injektif $f: V(Br_{n,m}) \rightarrow \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (2p-1)\}$ sebagai berikut.

$$f(v_j) = \begin{cases} -1 & ; j = 0, \\ 2j + 1; & j = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 2p - i & ; i \text{ ganjil}, \\ -(i + 1); & i \text{ genap}. \end{cases}$$

$$f(w_2) = 1.$$

Jika f^* merupakan pelabelan sisi yang diinduksi dari f , maka

$$f^*(v_0 v_j) = 2j$$

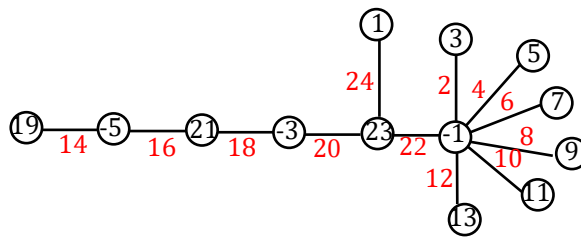
$$f^*(v_0 u_1) = 2(p-1)$$

$$f^*(u_i u_{i+1}) = 2(p-i-1); i = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$f^*(u_1 w) = 2p$$

Dengan mudah dapat diidentifikasi bahwa fungsi f dan f^* memenuhi kaidah pelabelan jumlah ganjil-genap. Terbukti bahwa graf $Br_{n,m} \odot_{u_1 w_1} P_2$ merupakan graf jumlah ganjil-genap. ■

Untuk memperjelas Teorema 4, diberikan contoh pelabelan jumlah ganjil-genap pada graf hasil identifikasi titik graf sapu dan graf lintasan $Br_{n,m} \odot_{u_1 w_1} P_2$ dapat dilihat pada Gambar 11.



Gambar 11. Pelabelan jumlah ganjil-genap pada graf sapu $Br_{5,6}$

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh bahwa graf sapu $Br_{n,m}$, graf sisir Cb_n , graf hasil identifikasi titik dua graf bintang homogen $(S_{1,n} \odot_{u_nv_n} S_{1,n})$, dan graf hasil identifikasi titik graf sapu dan graf lintasan $(Br_{n,m} \odot_{u_1w_1} P_2)$ merupakan graf jumlah ganjil-genap.

DAFTAR PUSTAKA

- Berliner, A.H., N. Dean., J. Hook., A. Marr., A. Mbirika, dan C.D. McBee. 2016. Coprime and Prime Labellings of Graphs. *Journal of Integer Sequence*. 19(2): 1-14. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1604.07698>
- Borowiecka-Olszewska, M., & Hałuszczak, M. (2013). On Ramsey (K_1, m, G) -minimal graphs. *Discrete Mathematics*, 313(19), 1843-1855. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.06.020>
- Chartrand, G. (1977). *Introductory Graph Theory*. Dover, New York.
- Dhanalakshmi, S., & Parvathi, N. (2018, April). Mean square cordial labelling related to some acyclic graphs and its rough approximations. In *Journal of physics: Conference series* (Vol. 1000, No. 1, p. 012040). IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1000/1/012040>
- Gallian, J. A. (2022). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 6(25), 4-623. Article DS6. <https://doi.org/10.37236/11668>
- Ghosh, P., & Pal, A. (2015). Some results of labeling on broom graph. *Journal: JOURNAL OF ADVANCES IN MATHEMATICS*, 9(9), 3055-3061. <https://core.ac.uk/download/pdf/322470979.pdf>
- Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4), 586-595. <https://doi.org/10.1137/0405048>
- Hartsfield, N., & Ringel, G. (2013). *Pearls in graph theory: a comprehensive introduction*. Courier Corporation.
- Janani, R. dan T. Ramachandran. 2023. Coprime Edge Labeling of Graphs. SSRN. 1-11. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4486269>
- Janani, R., & Ramachandran, T. (2022). On Relatively Prime Edge Labeling of Graphs. *Engineering Letters*. 30(2): 659-665. https://www.engineeringletters.com/issues_v30/issue_2/EL_30_2_30.pdf
- Kaneria, V. J., Teraiya, O., & Bhatt, P. (2018). Generalized odd-even sum labeling and some α -odd-even sum graphs. *International journal of Mathematics and its Applications*, 6(1-B), 381-385.
- Komarullah, H., Halikin, I., & Santoso, K. A. (2022, February). On the minimum span of cone, tadpole, and barbell graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 40-43). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.009>

- Kumar, A., & Vats, A. K. (2020). Application of graph Labeling in Crystallography. *Proc. Mater. Today*, 1-5. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.09.371>
- Latifi, S. (2007). A study of fault tolerance in star graph. *Information Processing Letters*, 102(5), 196-200. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2006.12.013>
- Manolopoulos, Y. (2024). Thematic Editorial: The Ubiquitous Network. *The Computer Journal*, 67(3), 809-811. <https://doi.org/10.1093/comjnl/bxae032>
- Marr, A., & Denis, W.W. (2013). *Magic Graphs*, Birkhauser. Boston.
- Monika, K., & Murugan, K. (2017). Odd-even sum labeling of some graphs. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 7(1), 57-63. <https://dx.doi.org/10.26708/ijmsc.2017.1.7.07>.
- Monika, K., & Murugan, K. (2018). Odd-even sum labeling in the context of duplication of graph elements. *Mapana Journal of Sciences*, 17(3), 17. <https://doi.org/10.12723/mjs.46.2>
- Monika, K., & Murugan, K. (2021). Odd-even sum labeling of some disconnected graphs. *Advances & Applications in Discrete Mathematics*, 28(1). <https://doi.org/10.17654/DM028010001>
- Monika, K., Murugan, K., & Balaji, V. (2022, January). A method of AMGL coding technique on odd-even sum labeling. In *American Institute of Physics Conference Series* (Vol. 2385, No. 1, p. 130036). <https://doi.org/10.1063/5.0070863>
- Nurhakim, R., & Harianto, B. (2020). An odd-even sum labeling of jellyfish and mushroom graphs. *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2(2), 87-90. <https://doi.org/10.15408/inprime.v2i2.14620>
- Pavlopoulos, G. A., Secrier, M., Moschopoulos, C. N., Soldatos, T. G., Kossida, S., Aerts, J., & Bagos, P. G. (2011). Using graph theory to analyze biological networks. *BioData mining*, 4, 1-27. <https://link.springer.com/article/10.1186/1756-0381-4-10>
- Prasanna, N. L., Sravanthi, K., & Sudhakar, N. (2014). Applications of graph labeling in communication networks. *Oriental Journal of Computer Science and Technology*, 7(1), 139-145. <http://www.computerscijournal.org/pdf/vol7no1/OJCSV07I1P139-145.pdf>
- Prihandoko, A. C., Dafik, D., & Agustin, I. H. (2019). Implementation of super H-antimagic total graph on establishing stream cipher. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 3(1), 14-23. <http://dx.doi.org/10.19184/ijc.2019.3.1.2>
- Vinutha, M. S., & Arathi, P. (2017). Applications of graph coloring and labeling in computer science. *International Journal on Future Revolution in Computer Science and Communication Engineering*, 3(8), 14-16.
- Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. Birkhauser. Boston.