Prosiding Pendidikan Matematika, Matematika, dan Statistika Volume 9 (2024)
e-ISSN No. 2721-6802

Pelabelan L(2,1) Pada Graf Hasil Amalgamasi Titik

Hafif Komarullah
Tadris Matematika, Universitas Al-Falah As-Sunniyah, Kencong-Jember
hafififa4@gmail.com

Abstrak—Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam teori graf yang terus eksis. Pelabelan graf merupakan suatu teknik pemberian label berupa bilangan bulat non negatif pada anggota graf berupa titik, sisi, atau keduanya dengan syarat-syarat tertentu. Salah satu pelabelan titik adalah pelabelan L(2,1) yang didefinisikan sebagai pemetaan titik graf ke bilangan bulat non negatif dengan syarat titik yang berjarak satu memiliki mutlak selisih label minimal dua dan titik yang berjarak dua memiliki mutlak selisih label minimal satu. Paper ini akan mencari nilai minimum label terbesar atau disebut nilai minimum $span$ pada graf hasil amalgamasi titik. Graf $Amal(G, v_0, t)$ adalah graf yang diperoleh dengan t salinan dari graf G dengan mengidentifikasi t salinan dari graf G pada titik tetap v_0. Graf yang dipilih dalam paper ini adalah graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf kipas, graf roda, graf bunga, dan graf $(C_n \times P_2) + \overline{K}_1$.

Kata kunci: Amalgamasi, Pelabelan L(2, 1), Span

I. PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu yang memiliki banyak manfaat dalam memecahkan permasalahan sehari-hari. Salah satu cabang dari matematika yaitu teori graf. Leonhard Euler pada tahun 1736 merupakan orang pertama yang memecahkan permasalahan menggunakan teori graf [1]. Leonhard Euler merepresentasikan objek dengan titik dan hubungan antar objek dengan sisi. Topik teori graf terus eksis hingga saat ini, salah satunya adalah pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan suatu teknik pemberian label berupa bilangan bulat non negatif pada anggota graf yaitu titik, sisi, atau keduanya dengan syarat-syarat tertentu. Pelabelan graf terus eksis karena memiliki banyak terapan seperti kriptografi, sistem jaringan, desain sirkuit transportasi, penentuan frekuensi radio dan lain-lain.

Terinspirasi dari penentuan frekuensi radio, pada tahun 1992 Griggs dan Yeh memperkenalkan pelabelan $L(2, 1)$. Misalkan diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf G adalah sebuah fungsi yang didefinisikan $f: V(G) \to N \cup \{0\}$ sedemikian sehingga $|f(u) - f(v)| \geq 2$ jika $d(u, v) = 1$ dan $|f(u) - f(v)| \geq 1$ jika $d(u, v) = 2$ untuk $u, v \in G$ [2]. Label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf G disebut $span(G)$. Jelas bahwa graf G akan memiliki lebih dari satu $span$, sehingga dalam topik ini terfokus dalam mencari nilai minimum $span$ pada graf G atau dinotasikan dengan $\lambda_{2,1}(G)$.

Grigs dan Yeh telah menunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(C_n) = 4, \lambda_{2,1}(P_n) = 4$ dan $\lambda_{2,1}(S_{1,n}) = n + 1$ [2]. Graf kipas dan graf roda dengan memiliki nilai minimum $span$ $n + 1$ [3]. Selengkapnya tentang pelabelan $L(2,1)$ dapat dilihat pada [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12]. Dalam paper ini, peneliti akan mencari nilai minimum $span$ pada hasil amalgamasi titik pada graf. Amalgamasi t salinan dari graf G pada titik tetap $v_0 \in V(G)$ dilambangkan dengan $Amal(G, v_0, t)$ adalah graf diperoleh dengan t salinan dari graf G dengan mengidentifikasi t salinan dari graf G pada titik tetap v_0 [13]. Peneliti akan mencari nilai minimum $span$ pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G adalah graf kipas, graf roda, graf bunga, dan graf $(C_n \times P_2) + \overline{K}_1$. Beberapa lema terkait pelabelan $L(2,1)$ akan disajikan sebagai berikut.

Lema 1. [14] *Jika H adalah subgraf dari G, maka* $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$.

Lema 2. [2] *Graf bintang* $(S_{1,n})$, $\lambda_{2,1}(S_{1,n}) = n + 1$.

II. METODE PENELITIAN

Penelitian ini tergolong dalam penelitian eksploratif dimana hasil dari penelitian ini ditujukan sebagai penambah wawasan baru dan memperkaya literatur khususnya dalam topik pelabelan graf. Dalam mendapatkan nilai minimum $span$ pada suatu graf maka dilakukan langkah-langkah berikut.

1. Studi literatur melalui berbagai sumber seperti skripsi, tesis, disertasi, jurnal, buku ataupun sumber lain terkait tentang pelabelan $L(2,1)$.
2. Menentukan graf yang akan diteliti yang dalam hal ini adalah graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G adalah graf kipas, graf roda, graf bunga, dan graf $(C_n \times P_2) + \overline{K}_1$.

e-ISSN No. 2721-6802

3. Menotasikan titik dan sisi serta melakukan percobaan pelabelan $L(2,1)$ pada graf yang dipilih dan kemudian dianalisis dengan metode deskriptif aksiomatik dan pendeteksian pola.
4. Pola yang telah diperoleh disusun untuk menjadi suatu teorema dan dibuktikan.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang langkah-langkah menentukan nilai minimum $span$ graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G adalah graf kipas, graf roda, graf bunga, dan graf $(C_n \times P_2) + \overline{K}_1$.

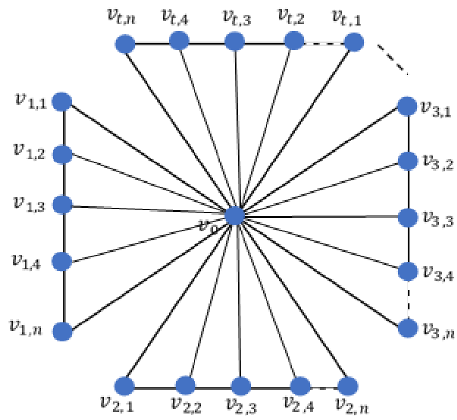
A. Amalgamasi Graf Kipas

Sesuai dengan langkah penelitian, setelah memilih graf yang akan diteliti yaitu melakukan penotasian titik dan sisi pada graf yang dipilih. Penotasian titik dan sisi pada amalgamasi graf kipas $(Amal(F_n, v_0, t))$ sebagai berikut.

$V\big(Amal(F_n, v_0, t)\big) = \{v_0\} \cup \{v_{ij} | i \in [1, t], j \in [1, n]\}$

$E\big(Amal(F_n, v_0, t)\big) = \{v_0 v_{ij} || i \in [1, t], j \in [1, n]\} \cup \{v_{ij} v_{ij+1} | i \in [1, t], j \in [1, n-1]\}$

Ilustrasi dari penotasian titik dan sisi pada graf $Amal(F_n, v_0, t)$ dapat dilihat pada Gambar 1.



GAMBAR 1. GRAF $Amal(F_n, v_0, t)$

Teorema 1. *Untuk sembarang* $n \geq 3$ *dan* $t \geq 2$, $\lambda_{2,1}\big(Amal(F_n, v_0, t)\big) = nt + 1$.

Bukti. Langkah awal untuk membuktikan Teorema 1 yaitu dengan membuktikan bahwa $\lambda_{2,1}\big(Amal(F_n, v_0, t)\big) \geq nt + 1$. Pandang bahwa graf bintang dengan order $nt + 1$ atau dinotasikan dengan $S_{1,nt}$ merupakan subgraf dari graf $Amal(F_n, v_0, t)$. Berdasarkan Lema 1 dan Lema 2 diperoleh $\lambda_{2,1}\big(Amal(F_n, v_0, t)\big) \geq \lambda_{2,1}(S_{1,nt}) = nt + 1$. Sehingga terbukti bahwa $\lambda_{2,1}\big(Amal(F_n, v_0, t)\big) \geq nt + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}\big(Amal(F_n, v_0, t)\big) \leq nt + 1$ yaitu dengan mendefinisikan fungsi pelabelan $f: V\big(Amal(F_n, v_0, t)\big) \to \{1,2, \ldots, nt + 1\}$ yang akan dibagi menjadi dua kasus berikut.

1. Untuk t ganjil

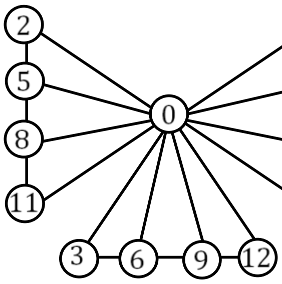
$$f(v_0) = 0$$
$$f(v_{ij}) = (i + 1) + tj - t; i \in [1, t], j \in [1, n]$$

2. Untuk t genap

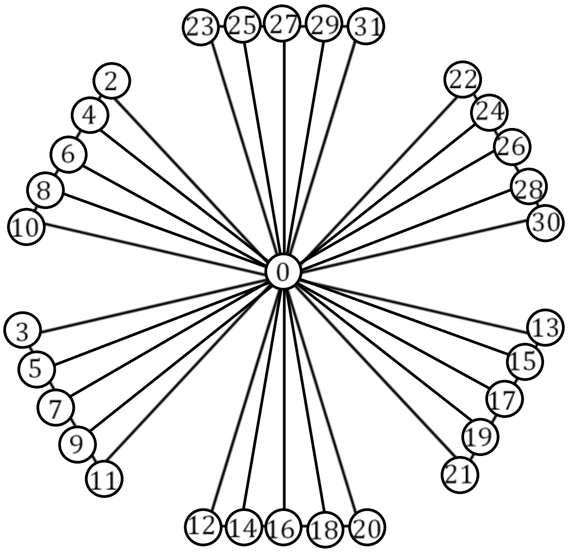
$$f(v_0) = 0$$
$$f(v_{ij}) = \begin{cases} n(i-1) + 2j & ; i \equiv 1 \ mod\ 2\ dan\ j \in [1, n] \\ n(i-2) + 2j + 1; & i \equiv 0\ mod\ 2\ dan\ j \in [1, n] \end{cases}$$

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa titik yang berjarak satu memiliki mutlak selisih label minimal dua dan titik yang berjarak dua memiliki mutlak selisih label minimal satu. Sehingga terbukti bahwa $\lambda_{2,1}\big(Amal(F_n, v_0, t)\big) \leq nt + 1$. Terbukti bahwa $\lambda_{2,1}\big(Amal(F_n, v_0, t)\big) = nt + 1$. ∎

Untuk memperjelas Teorema 1 akan ditunjukkan contoh pada Gambar 2 untuk kasus t ganjil dan Gambar 3 untuk kasus t genap.



GAMBAR 2. PELABELAN L(2,1) PADA GRAF $Amal(F_4, v_0, 3)$



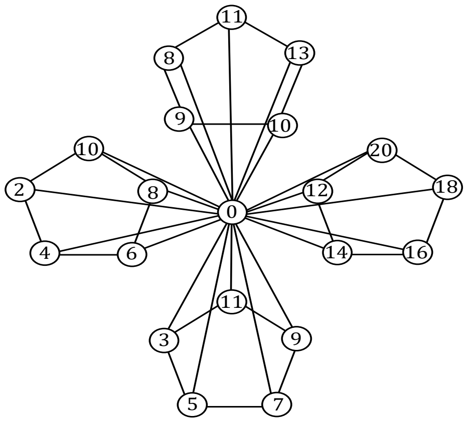
GAMBAR 3. PELABELAN L(2,1) PADA GRAF $Amal(F_5, v_0, 6)$

Akibat 1. *Untuk sembarang* $n \geq 4$ *dan* $t \geq 2$, $\lambda_{2,1}\big(Amal(W_n, v_0, t)\big) = nt + 1$.
Bukti. Pandang bahwa graf $Amal(F_n, v_0, t)$ jika setiap titik v_{i1} dan v_{in} untuk $i \in [1, t]$ dihubungkan oleh sebuah sisi, maka akan terbentuk graf $Amal(W_n, v_0, t)$. Hal tersebut mengakibatkan titik v_{i1} dan v_{in} untuk $i \in [1, t]$ berjarak satu. Berikut akan dibuktikan bahwa mutlak selisih label titk v_{i1} dan v_{in} untuk $i \in [1, t]$ minimal dua.

1. Untuk t ganjil
   $|f(v_{i1}) - f(v_{in})| = \big|(i+1) - \big((i+1) + tn - t\big)\big| = t(n-1) \geq 2$ karena $n \geq 4$ dan $t \geq 2$
2. Untuk t genap
   Pada kasus $i \equiv 1 \; mod \; 2$
   $|f(v_{i1}) - f(v_{in})| = |(n(i-1) + 2) - (n(i-1) + 2n)| = 2n - 2 \geq 2$ karena $n \geq 4$
   Pada kasus $i \equiv 0 \; mod \; 2$
   $|f(v_{i1}) - f(v_{in})| = |(n(i-2) + 3) - (n(i-2) + 2n + 1)| = 2n - 2 \geq 2$ karena $n \geq 4$

Dapat ditunjukkan bahwa mutlak selisih label titik yang berjarak satu adalah minimal dua. Kemudian dengan jelas dapat ditunjukkan bahwa fungsi pelabelan pada graf $Amal(F_n, v_0, t)$ merupakan fungsi injektif, sehingga titik yang berjarak dua memiliki mutlak selisih label minimal satu. Terbukti bahwa pola label graf $Amal(F_n, v_0, t)$ dapat diterapkan pada graf $Amal(W_n, v_0, t)$. Sehingga terbukti bahwa $\lambda_{2,1}\big(Amal(W_n, v_0, t)\big) = nt + 1$. ■
Contoh pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Amal(W_n, v_0, t)$ dapat dilihat pada Gambar 4.

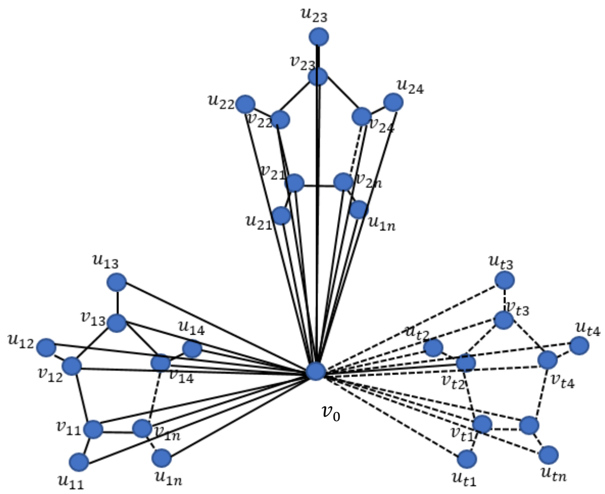
e-ISSN No. 2721-6802



GAMBAR 4. PELABELAN L(2,1) PADA GRAF $Amal(W_5, v_0, 4)$

B. Amalgamasi Graf Bunga

Langkah selanjutnya setelah menentukan kelas graf sebagai objek penelitian yaitu melakukan penotasian titik dan sisi pada graf $Amal(Fl_n, v_0, t)$ yang dijabarkan sebagai berikut.
$V\big(Amal(Fl_n, v_0, t)\big) = \{v_0\} \cup \{v_{ij} \big| i \in [1, t], j \in [1, n]\} \cup \{u_{ij} \big| i \in [1, t], j \in [1, n]\}$
$E\big(Amal(Fl_n, v_0, t)\big) = \{v_0 v_{ij}, v_0 u_{ij}, v_{ij} u_{ij} | i \in [1, t], j \in [1, n]\} \cup \{v_{i1} v_{in}, v_{ij} v_{ij+1} \big| i \in [1, t], j \in [1, n-1]\}$
Ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf $Amal(Fl_n, v_0, t)$ dapat dilihat pada Gambar 5.



GAMBAR 5. GRAF $Amal(Fl_n, v_0, t)$

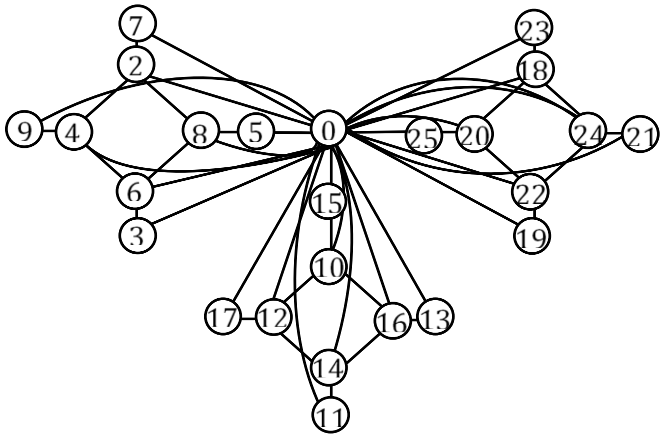
Teorema 2. *Untuk sembarang* $n \geq 3$ *dan* $t \geq 2$, $\lambda_{2,1}\big(Amal(Fl_n, v_0, t)\big) = 2nt + 1$.

Bukti. Dengan cara yang sama akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}\big(Amal(Fl_n, v_0, t)\big) \geq 2nt + 1$. Jelas bahwa graf bintang $(S_{1,2nt})$ merupakan subgraf dari graf $Amal(Fl_n, v_0, t)$. Berdasarkan Lema 1 dan Lema 2 diperoleh $\lambda_{2,1}\big(Amal(Fl_n, v_0, t)\big) \geq \lambda_{2,1}(S_{1,2nt}) = 2nt + 1$. Sehingga terbukti bahwa $\lambda_{2,1}\big(Amal(Fl_n, v_0, t)\big) \geq 2nt + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}\big(Amal(Fl_n, v_0, t)\big) \leq 2nt + 1$ yaitu dengan mendefinisikan fungsi pelabelan $f: V\big(Amal(Fl_n, v_0, t)\big) \to \{1,2, \dots, 2nt + 1\}$ yang akan dibagi menjadi dua kasus berikut.

$$f(v_0) = 0$$
$$f(v_{ij}) = 2(i-1)n + 2j; i \in [1, t], j \in [1, n]$$
$$f(u_{ij}) = \begin{cases} 2in + 2j - 3 & ; i \in [1, t], j = 1,2 \\ 2(i-1)n + 2j - 3; & i \in [1, t], j \in [3, n] \end{cases}$$

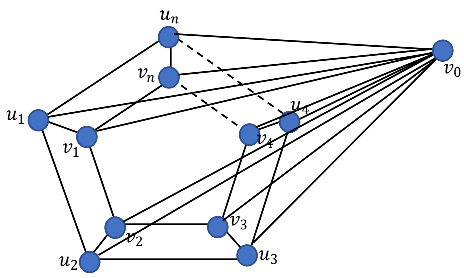
Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa titik yang berjarak satu memiliki mutlak selisih label minimal dua dan titik yang berjarak dua memiliki mutlak selisih label minimal satu. Sehingga $\lambda_{2,1}\big(Amal(Fl_n, v_0, t)\big) \leq 2nt + 1$. Terbukti bahwa $\lambda_{2,1}\big(Amal(Fl_n, v_0, t)\big) = 2nt + 1$. ■

Contoh pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Amal(Fl_n, v_0, t)$ dapat dilihat pada Gambar 6 berikut.



GAMBAR 5. PELABELAN L(2,1) PADA GRAF $Amal(Fl_4, v_0, 3)$

Graf bunga dengan order n jika titik u_j dan u_{j+1} untuk $j \in [1, n-1]$ dihubungkan oleh sebuah sisi, maka akan membentuk graf $C_n \times P_2$. Selanjutnya akan direkontruksi graf $(C_n \times P_2) + \overline{K}_1$ pada Gambar 6.



GAMBAR 6. GRAF $(C_n \times P_2) + \overline{K}_1$

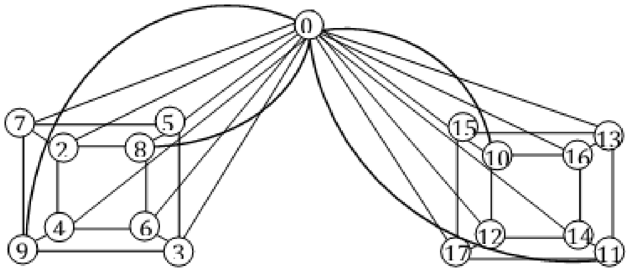
Jika setiap titik u_{ij} dan u_{ij+1} dengan $i \in [1, t]$ dan $j \in [1, n-1]$ pada graf $Amal(Fl_n, v_0, t)$ dihubungkan, maka akan terbentuk graf $Amal\big((C_n \times P_2) + \overline{K}_1, v_0, t\big)$.

Akibat 2. *Untuk sembarang* $n \geq 3$ *dan* $t \geq 2$, $\lambda_{2,1}\left(Amal\big((C_n \times P_2) + \overline{K}_1, v_0, t\big)\right) = 2nt + 1$.

Bukti. Dengan cara yang sama seperti Akibat 1, dapat dibuktikan bahwa pola label pada graf $Amal(Fl_n, v_0, t)$ dapat diterapkan pada graf $Amal\big((C_n \times P_2) + \overline{K}_1, v_0, t\big)$. Sehingga terbukti bahwa $\lambda_{2,1}\left(Amal\big((C_n \times P_2) + \overline{K}_1, v_0, t\big)\right) = 2nt + 1$. ■

Sebagai contoh dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Amal\big((C_n \times P_2) + \overline{K}_1, v_0, t\big)$ dapat dilihat pada Gambar 7.

Prosiding Pendidikan Matematika, Matematika, dan Statistika Volume 9 (2024)
e-ISSN No. 2721-6802



GAMBAR 5. PELABELAN L(2,1) PADA GRAF $Amal((C_4 \times P_2) + \overline{K_1}, v_0, 2)$

IV. SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan didapatkan bahwa nilai minimum $span$ pada amagamasi graf kipas $Amal(F_n, v_0, t)$ dan amalgamasi graf roda $Amal(W_n, v_0, t)$ adalah sama yaitu $nt + 1$. Kemudian dalam paper ini juga didapatkan bahwa nilai minimum $span$ pada amagamasi graf bunga $Amal(Fl_n, v_0, t)$ dan amalgamasi graf $(C_n \times P_2) + \overline{K}_1$ dinotasikan $Amal\big((C_n \times P_2) + \overline{K}_1, v_0, t\big)$ adalah sama yaitu $2nt + 1$. Peneliti menyarankan pada peneliti lain untuk melakukan penelitian yang sama pada kelas graf atau operasi graf yang berbeda. Peneliti juga menyarankan agar hasil dari pelabelan $L(2{,}1)$ dapat diimplementasikan dalam kehidupan sehari-hari.

DAFTAR PUSTAKA

[1] H. Komarullah, "Pelabelan prima dan koprima graf P_m⊙ K_n dan GRAF P_m⊙ P_n," in *Prosiding Seminar Pendidikan Matematika dan Matematika*, 2023.

[2] J. R. Griggs and R. K. Yeh, "Labelling Graphs with a Condition at Distance 2," *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 5, no. 4, pp. 586-595, 1992.

[3] S. Fatimah, I. Sudarsana and S. Musdalifah, "Pelabelan L(2,1) pada Operasi Beberapa Kelas Graf," *Jurnal Ilmiah dan Matematika Terapan*, vol. 3, no. 2, pp. 73-84, 2016.

[4] F. Havet, B. Reed and J.-S. Sereni, "L (2, 1)-labelling of graphs," in *ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms (SODA 2008)*, San Francisco, 2008.

[5] W.-F. Wang, "The L (2, 1)-labelling of trees," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 154, no. 3, pp. 598-603, 2006.

[6] M. Aminulloh and R. Afif, "Minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi L (2, 1) pada graf petersen P (n, 1)," Diss. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang, 2019.

[7] I. A. Umam, I. Halikin and M. Fatekurohman, "L (2, 1) Labeling of Lollipop and Pendulum Graphs," in *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)*, Jember, 2022.

[8] Y. Sagala and Susiana, "Pelabelan L(2,1) pada Graf Sierpinski S(n,k)," *Karismatika*, vol. 3, no. 2, pp. 130-139, 2017.

[9] H. Komarullah, "Pelabelan L (2, 1) Pada Graf Buku Segi Tiga, Graf Kerucut, Graf Tadpole, dan Graf Dumbbell Serta Graf Hasil Identifikasi Titik Dari Graf Buku Segi Tiga dan Graf lintasan," 2020. [Online]. Available: http://repository.unej.ac.id/handle/123456789/99497. [Accessed 17 12 2023].

[10] H. Komarullah, I. Halikin and K. A. Santoso, "On the Minimum Span of Cone, Tadpole, and Barbell Graphs," in *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)*, Jember, 2022.

[11] I. Halikin and H. Komarullah, "Labelling of Generalized Friendship, Windmill, and Torch Graphs with a Condition at Distance Two," in *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021).*, Jember, 2022.

[12] H. Komarullah, "Nilai Minimum Span pada Graf Gurita, Graf Siput, dan Graf Ubur-Ubur," in *PROSSIDING GALUH MATHEMATICS NATIONAL CONFERENCE*, 2023.

[13] H. Komarullah, K. Wijaya and Slamin, "A Minimum Coprime Number for Amalgamation of Wheel," in *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)*, 2021.

[14] A. Lum, "Upper Bound on L(2,1)-labelling Number of Graphs with Maximum Degree Δ," 2007.

[15] J. R. Griggs and R. K. Yeh, "Labelling Graphs with a Condition at Distance 2," *SIAM Journal On Discrete Mathematics*, vol. 5, no. 4, pp. 586-595, 1992.

[16] L. N. Karimah, "Pelabelan L (2, 1) pada graf super cycle," *Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim*, 2016.