LOMBA DAN SEMINAR MATEMATIKA XXXI

Prosiding Pendidikan Matematika, Matematika dan Statistika Volume 8 (2023)
e-ISSN No. 2721-6802

PELABELAN PRIMA DAN KOPRIMA PADA GRAF $P_m \odot K_n$ DAN GRAF $P_m \odot P_n$

Hafif Komarullah
SMKS Al-Ishaqi, Jalan Merapi No. 46 Jember
E-mail : hafififa4@gmail.com

Abstrak— Misalkan diberikan graf $\boldsymbol{G}$ dengan $\boldsymbol{V(G)}$ sebagai himpunan titik dan $\boldsymbol{E(G)}$ sebagai himpunan sisi pada graf $\boldsymbol{G}$. Pelabelan koprima adalah pemetaan titik graf ke bilangan bulat positif sedemikian sehingga label titik yang bertetangga relatif prima. Misalkan label terbesar dari pemetaan tersebut adalah $\boldsymbol{k}$. Pelabelan tersebut dikatakan pelabelan koprima jika $\boldsymbol{k} \geq |\boldsymbol{V(G)}|$. Jika $\boldsymbol{k} = |\boldsymbol{V(G)}|$ maka pelabelan koprima disebut pelabelan prima. Nilai minimum label terbesarnya atau disebut *minimum coprime number* pada graf $\boldsymbol{G}$ dinotasikan dengan $\mathfrak{pr}(\boldsymbol{G})$. Penelitian ini mencari pelabelan prima dan koprima pada graf hasil operasi korona antara graf lintasan dan graf lengkap. Pada penelitian ini didapatkan hasil bahwa graf hasil korona antara graf lintasan berorder $\boldsymbol{m}$ dan graf lengkap berorder $\boldsymbol{n}$ merupakan graf koprima, $\mathfrak{pr}(\boldsymbol{P_m \odot K_n}) = \boldsymbol{p_{m(n-1)+1}}$ dengan $\boldsymbol{p_{m(n-1)+1}}$ merupakan $\boldsymbol{m(n-1)+1}$ bilangan prima pertama dan graf hasil operasi korona antara graf lintasan berorder $\boldsymbol{m}$ dan graf lintasan berorder $\boldsymbol{n}$ merupakan graf prima untuk $\boldsymbol{n}$ ganjil dan graf koprima untuk $\boldsymbol{n}$ genap.

Kata kunci: Pelabelan, Prima, Koprima, Relatif Prima

I. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan cabang matematika yang dimanfaatkan untuk memecahkan berbagai masalah. Dalam penerapannya, teori graf merepresentasikan objek sebagai titik dan hubungan antar objek sebagai sisi. Secara matematis graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan titik $V(G)$ yang tak boleh kosong dan himpunan sisi $E(G)$ yang boleh kosong [1]. Leonhard Euler merupakan orang pertama yang menggunakan teori graf untuk membuktikan bahwa tidak mungkin melewati Jembatan Konisberg hanya satu kali jika ingin kembali ke titik awal keberangkatan. Pelabelan graf adalah salah satu topik teori graf yang pertama diperkenalkan pada pertengahan 1960-an [2]. Pelabelan graf merupakan pemetaan anggota-anggota graf ke bilangan bulat non negatif dengan kaidah tertentu [3]. Berdasarkan domainnya pelabelan graf terbagi menjadi pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total [4]. Pelabelan koprima merupakan salah satu topik pelabelan titik pada teori graf.

Pelabelan koprima adalah pemetaan titik pada suatu graf ke bilangan bulat positif dengan syarat label titik yang bertetangga (*adjacent*) harus relatif prima. Jika dua bilangan bilangan bulat positif a dan b memiliki *greatest common divisor* sama dengan satu atau dapat ditulis $gcd(a, b) = 1$, maka a dan b disebut relatif prima [5]. Secara matematis misalkan diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan fungsi pelabelan titik pada graf G didefinisikan $f: V(G) \to \{1,2,3, \ldots, k\}$ sedemikian sehingga label titik $adjacent$ relatif prima. Jika k sama dengan kardinalitas $V(G)$, maka fungsi f dikatakan pelabelan prima. Jika k lebih besar dari kardinalitas $V(G)$, maka fungsi f dikatakan pelabelan koprima. Jelas bahwa setiap graf G memiliki lebih dari satu pelabelan koprima, sehingga dalam topik ini terfokus kepada mencari nilai minimum dari label terbesar atau disebut *minimum coprime number* yang dinotasikan dengan $\mathfrak{pr}(G)$ [6].

Parul B Pandya dan N P Shrimali pada tahun 2018 menunjukkan bahwa graf helm, graf *bistar* dan graf matahari merupakan graf prima [7]. Referensi [8] menunjukan bahwa graf bintang dan graf persahabatan merupakan graf prima. Prabhakaran juga telah mendapatkan graf *Franklin* merupakan graf prima [9].John Asplund dan N. Bradley Fox pada tahun 2019 meneliti tentang pelabelan prima pada graf prisma dan graf Petersen [10]. Catherine Lee pada tahun 2020 meneliti tentang pelabelan pada graf $K_n \odot \overline{K}_2$, dan operasi join antara dua graf lintasan dan graf join dua siklus [11]. Hafif Komarullah pada tahun 2022 telah menunjukan bahwa amalgamasi titik pada graf roda merupakan pelabelan koprima [12]. Berdasarkan

penelitian sebelumnya, peneliti akan melakukan penelitian serupa pada graf hasil operasi korona. Operasi korona dari graf G dan graf H dinotasikan sebagai $G \odot H$. Graf $G \odot H$ didapat dari sebuah duplikat dari graf H sebanyak $|V(G)|$ dan duplikat dari graf H yaitu H_i dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, |V(G)|$ kemudian menghubungkan setiap titik ke-i dari G ke setiap titik di H_i [13]. Untuk menunjang pembuktian teorema pada penelitian ini, maka akan disajikan Lema 1 terkait relatif prima.
Lema 1. [12] *Misalkan a adalah bilangan bulat positif dalam* $1 \bmod 2$. *Jika bilangan bulat positif r tidak memiliki faktor ganjil selain satu, maka* $gcd(a, a + r) = 1$.

II. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

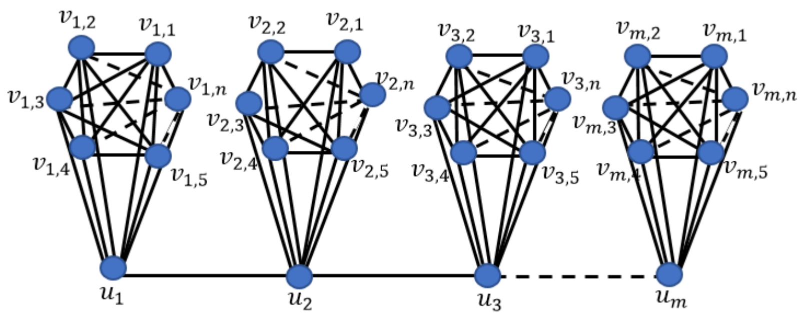
1. Studi literatur yang disajikan berupa buku, skripsi, tesis maupun jurnal terkait pelabelan prima dan koprima.
2. Deskriptif aksiomatik yaitu dengan menyajikan definisi, lema atau teorema sebelumnya terkait pelabelan prima dan koprima.
3. Pendeteksian pola yaitu dengan melihat pola yang diperoleh dari percobaan pelabelan koprima dan akan digunakan sebagai batas atas dari pelabelan tersebut.

III. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dipaparkan hasil pelabelan prima dan koprima dari beberapa graf hasil operasi korona sebagai berikut.

A. Graf Hasil Operasi Korona Graf Lintasan dan Graf Lengkap ($P_m \odot K_n$)

Graf $(P_m \odot K_n)$ memiliki $m(n + 1)$ titik. Himpunan titik dan sisi pada graf $(P_m \odot P_n)$ dinotasikan sebagai berikut.
$V(P_m \odot P_n) = \{u_i | i \in [1, m]\} \cup \{v_{i,j} | i \in [1, m], j \in [1, n]\}$
$E(P_m \odot P_n) = \{u_i u_{i+1} | i \in [1, m - 1]\} \cup \{u_i v_{i,j} | i \in [1, m], j \in [1, n]\} \cup \{v_{ij} v_{ik} | k \in [1, m], j \neq k\}$.



GAMBAR 1. Penotasian Titik dan Sisi Graf $P_m \odot K_n$

Teorema 2. Untuk setiap bilangan bulat $m \geq 2$ dan $n \geq 4$, $\mathfrak{pr}(P_m \odot K_n) = p_{m(n-1)+1}$ dengan $p_{m(n-1)+1}$ adalah $m(n - 1) + 1$ bilangan prima pertama untuk setiap m dan n bilangan asli.
Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $\mathfrak{pr}(P_m \odot K_n) \geq p_{m(n-1)+1}$ dengan $p_{m(n-1)+1}$ adalah $m(n - 1) + 1$ bilangan prima pertama. Titik u_i harus dilabeli dengan label prima karena terhubung ke setiap titik v_{ij}, Titik v_{ij} dilabeli dengan 1 label ganjil dan 1 label genap serta $m(n - 2)$ label prima. Karena 2 merupakan bilangan prima, sehingga dibutuhkan $m + m(n - 2) + 1 = m(n - 1) + 1$ bilangan prima. Sehingga terbukti bahwa $\mathfrak{pr}(P_m \odot K_n) \geq p_{m(n-1)+1}$. Selanjutnya akan dibuktikan $\mathfrak{pr}(P_m \odot K_n) \leq p_{m(n-1)+1}$ yaitu dengan membangun pelabelan koprima pada graf $P_m \odot K_n$. Didefinisikan fungsi $f: V(P_m \odot K_n) \to \{1,2, \ldots, p_{m(n-1)+1}\}$ sebagai berikut.

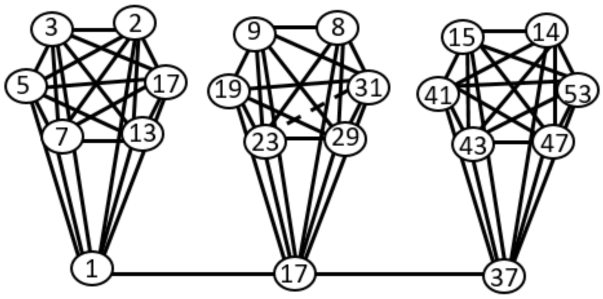
$$f(u_i) = \begin{cases} 1 & ; i = 1 \\ (n-1)i - (n-3); & i = 2,3, \ldots m. \end{cases}$$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 6i - 4 & ; j = 1, \\ 6i - 3 & ; j = 2, \\ p_{((n-1)i+1-(n-j))}; & j = 3,4, \ldots, n. \end{cases}$$

Jelas bahwa setiap titik yang bertetangga mempunyai label yang saling relatif prima, sehingga $\mathfrak{pr}(P_m \odot K_n) \leq p_{m(n-1)+1}$. Jadi, $\mathfrak{pr}(P_m \odot K_n) = p_{m(n-1)+1}$.

Prosiding Pendidikan Matematika, Matematika dan Statistika Volume 8 (2023)
e-ISSN No. 2721-6802

Untuk memperjelas Teorema 1, Gambar 2 merupakan contoh pelabelan koprima pada graf $P_4 \odot K_6$. Nilai $\mathrm{pr}(P_m \odot K_n) = p_{16} = 53$



GAMBAR 2. Pelabelan Koprima Graf $P_3 \odot K_6$

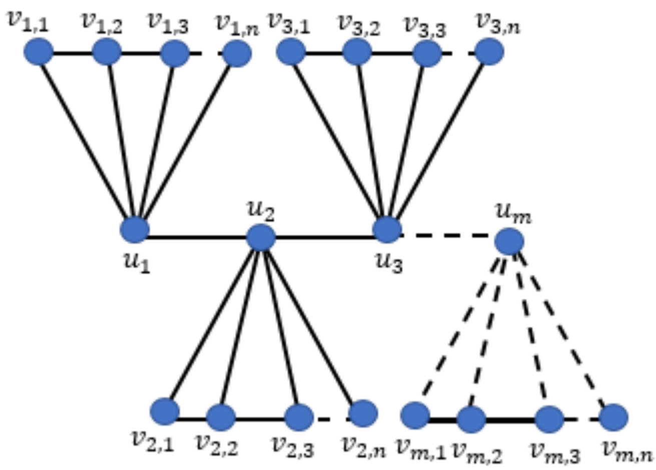
B. Graf Hasil Operasi Korona Antara Dua Graf Lintasan $(P_m \odot P_n)$

Graf $(P_m \odot P_n)$ memiliki $m(n+1)$ titik. Himpunan titik dan sisi pada graf $(P_m \odot P_n)$ dinotasikan sebagai berikut.

$V(P_m \odot P_n) = \{u_i | i \in [1,m]\} \cup \{v_{i,j} | i \in [1,m], j \in [1,n]\}$

$E(P_m \odot P_n) = \{u_i u_{i+1} | i \in [1, m-1]\} \cup \{u_i v_{i,j} | i \in [1,m], j \in [1,n]\} \cup \{v_{i,j} v_{i,j+1} | i \in [1,m], j \in [1, n-1]\}$

Gambar 3 merupakan ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf $(P_m \odot P_n)$.



GAMBAR 3. Penotasian Titik dan Sisi Graf $P_m \odot P_n$

Lema 3. Batas bawah Graf $P_m \odot P_n$ untuk n ganjil merupakan graf prima.

Bukti. Graf $P_m \odot P_n$ memiliki $m(n+1)$ titik. Setiap titik u_i harus dilabeli dengan label ganjil untuk memperkecil kemungkinan relatif prima dengan setiap titik v_{ij}. Titik v_{ij} membutuhkan $\frac{n-1}{2}$ label ganjil dan $\frac{n+1}{2}$ label genap. Sehingga total label ganjil dan genap yang dibutuhkan adalah $m + m\left(\frac{n-1}{2} + \frac{n+2}{2}\right) = m(n+1)$ label. Sehingga terbukti bahwa $m(n+1)$ label cukup untuk melabeli graf $P_m \odot P_n$ dengan n ganjil.

Selanjutnya dalam penelitian ini fungsi pelabelan prima pada graf $P_m \odot P_n$ dengan n ganjil secara umum belum ditemukan. Dalam hal ini peneliti memberikan beberapa proposisi batas atas.

Proposisi 4. Graf $P_m \odot P_3$ merupakan graf prima.

Bukti. Berdasarkan Lema 2 batas bawah graf $P_m \odot P_n$ merupakan graf prima, maka untuk membuktikan graf $P_m \odot P_3$ cukup dengan membangun fungsi pelabelan prima pada graf $P_m \odot P_3$. Definisikan fungsi $f: V(P_m \odot P_3) \to \{1, 2, \dots, 4m\}$ sebagai berikut.

$$f(u_i) = 4i - 3$$

Kasus $i \equiv 1 \; mod \; 3$

$$f(v_{ij}) = 4i + j - 3; j = 1, 2, 3.$$

Syarat pelabelan prima setiap titik yang bertetangga harus relatif prima. Hal tersebut ditunjukkan sebagai berikut.

e-ISSN No. 2721-6802

1. Titik u_i dan u_{i+1} relatif prima. Berdasarkan Lema 1 $gcd(4i-3,4i+1)=1$ karena $|\ |(4i-3)-(4i+1)=4$ dan 4 tidak memiliki faktor ganjil selain 1.
2. Titik u_i dan titik v_{i1} relatif prima karena konsekutif atau dapat ditulis $gcd(4i-3,4i-2)=1$.
3. Titik u_i dan v_{i2} relatif prima. Berdasarkan Lema 1 $gcd(4i-3,4i-1)=1$ karena $|\ |(4i-3)-(4i+1)=4$ dan 4 tidak memiliki faktor ganjil selain 1.
4. Titik u_i dan titik v_{i3} relatif prima. Akan ditunjukkan $gcd(4i-3,4i)=k$. Misalkan $4i-j=kx$ dan $4i=ky$, maka didapatkan $k(y-x)=3$. Faktor dari 3 adalah 1 dan 3. Karena $4i-3\equiv 1\ mod\ 3$, maka $k\neq 3$. Sehingga terbukti $k=1$.

Kasus $i\equiv 0\ mod\ 3$

$$f(v_{ij})=\begin{cases}4i+j-3; j=1 \text{ dan } 2.\\ 4i-4 \quad ; j=3\end{cases}$$

Kasus $i\equiv 2\ mod\ 3$

$$f(v_{ij})=\begin{cases}4i+j-3; j=1 \text{ dan } 2.\\ 4i+4 \quad ; j=3\end{cases}$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa setiap titik yang bertetangga relatif prima. Sehingga terbukti bahwa graf $P_m\odot P_3$.

Proposisi 5. Graf $P_m\odot P_5$ merupakan graf prima.

Bukti. Berdasarkan Lema 2 batas bawah graf $P_m\odot P_n$ merupakan graf prima, maka untuk membuktikan graf $P_m\odot P_5$ cukup dengan membangun fungsi pelabelan prima pada graf $P_m\odot P_5$. Definisikan fungsi $f: V(P_m\odot P_5)\to\{1,2,\dots,6m\}$ sebagai berikut.

$$f(u_i)=6i-5$$

Kasus $i\equiv 0\ mod\ 5$

$$f(v_{ij})=\begin{cases}6i+j-5; j=1,2,3,4\\ 6i-6 \quad ; j=5\end{cases}$$

Kasus $i\equiv 1\ mod\ 5, i\equiv 2\ mod\ 5$ dan $i\equiv 3\ mod\ 5$

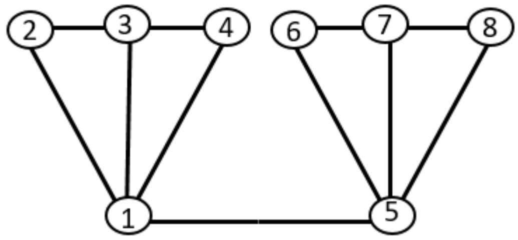
$$f(v_{ij})=6i+j-5$$

Kasus $i\equiv 4\ mod\ 5$

$$f(v_{ij})=6i+j-5$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa setiap titik yang bertetangga relatif prima. Sehingga terbukti bahwa graf $P_m\odot P_5$.

Sebagai contoh Gambar 3 merupakan pelabelan prima pada graf $P_2\odot P_3$.



GAMBAR 4. Pelabelan Prima Graf $P_2\odot P_3$

Lema 6. Untuk setiap bilangan bulat $m\geq 2$ dan n genap, $\mathfrak{pr}(P_m\odot P_n)\geq mn+2m-1$.

Bukti. Graf $P_m\odot P_n$ memiliki $m(n+1)$ titik. Untuk mendapatkan nilai *minimum coprime number* pelabelan harus dimulai dari titik yang memiliki derajat terbesar. Dalam hal ini titik u_i memiliki derajat terbesar. Titik u_i harus dilabeli dengan label ganjil untuk meminimalisir kemungkinan tidak relatif prima dengan setiap titik v_{ij}. Titik v_{ij} membutuhkan $\frac{n}{2}$ label ganjil dan $\frac{n}{2}$ label genap. Sehingga total label ganjil yang dibutuhkan graf $P_m\odot P_n$ adalah $\frac{mn+2m}{2}$ label ganjil. Jelas bahwa tidak cukup label ganjil pada $m(n+1)$. Karena terdapat $\frac{mn+2m}{2}$ label ganjil pada himpunan $1,2,\dots mn+2m-1$, sehingga terbukti $\mathfrak{pr}(P_m\odot P_n)\geq mn+2m-1$.

Proposisi 7. Untuk setiap bilangan bulat $m\geq 2$, $\mathfrak{pr}(P_m\odot P_2)=4m-1$.

Bukti. Berdasarkan Lema 6 terbukti bahwa $\mathfrak{pr}(P_m\odot P_2)\geq 4m-1$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\mathfrak{pr}(P_m\odot P_2)\leq 4m-1$ yaitu dengan membangun fungsi pelabelan koprima pada graf $P_m\odot P_2$. Definisikan

Prosiding Pendidikan Matematika, Matematika dan Statistika Volume 8 (2023)
e-ISSN No. 2721-6802

fungsi $f: V(P_m \odot P_2) \rightarrow \{1, 2, \dots, 4m-1\}$ sebagai berikut.

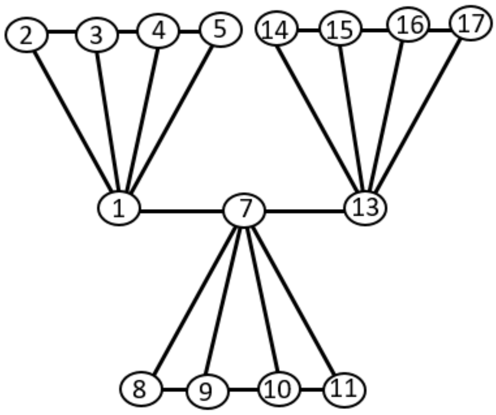
$$f(v_{ij}) = 4i + (j-3); j = 1 \text{ dan } 2$$
$$f(u_i) = 4i - 3; i = 1,2, \dots, m$$

Jelas bahwa setiap titik yang bertetangga relatif prima, sehingga terbukti bahwa $\mathrm{pr}(P_m \odot P_2) \leq 4m-1$. Karena $\mathrm{pr}(P_m \odot P_2) \geq 4m-1$ dan $\mathrm{pr}(P_m \odot P_2) \leq 4m-1$, terbukti $\mathrm{pr}(P_m \odot P_2) = 4m-1$.

Proposisi 8. Untuk setiap bilangan bulat $m \geq 2$, $\mathrm{pr}(P_m \odot P_4) = 6m-1$.
Bukti. Berdasarkan Lema 6 terbukti bahwa $\mathrm{pr}(P_m \odot P_2) \geq 4m-1$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\mathrm{pr}(P_m \odot P_4) \leq 6m-1$ yaitu dengan membangun fungsi pelabelan koprima pada graf $P_m \odot P_6$. Definisikan fungsi $f: V(P_m \odot P_4) \rightarrow \{1, 2, \dots, 6m-1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_{ij}) = 6i + (j-5); j = 1, 2, 3, 4$$
$$f(u_i) = 6i - 5; i = 1,2, \dots, m$$

Jelas bahwa setiap titik yang bertetangga relatif prima, sehingga terbukti bahwa $\mathrm{pr}(P_m \odot P_4) \leq 6m-1$. Karena $\mathrm{pr}(P_m \odot P_4) \geq 6m-1$ dan $\mathrm{pr}(P_m \odot P_4) \leq 6m-1$, terbukti $\mathrm{pr}(P_m \odot P_4) = 6m-1$.
Sebagai contoh Gambar 5 merupakan pelabelan koprima pada graf $P_3 \odot P_4$ dengan minimum crime number sama dengan 17.



GAMBAR 5. Pelabelan Koprima Graf $P_3 \odot P_4$

IV. SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan diatas didapatkan hasil sebagai berikut.
1. Graf $P_m \odot K_n$ merupakan graf koprima, $\mathrm{pr}(P_m \odot K_n) = p_{m(n-1)+1}$ dengan $p_{m(n-1)+1}$ merupakan $m(n-1)+1$ bilangan prima pertama.
2. Graf $P_m \odot P_n$ merupakan graf prima untuk n ganjil dan graf koprima untuk n genap.

Dalam penelitian ini terdapat beberapa masalah terbuka sebagai berikut.
1. Bagaimana batas atas dari pelabelan prima pada graf $P_m \odot P_n$ untuk n ganjil dan $n \geq 7$?
2. Bagaimana batas atas dari pelabelan koprima pada graf $P_m \odot P_n$ untuk n genap dan $n \geq 6$?

Saran bagi peneliti lain hendaknya melanjutkan masalah terbuka yang tersedia pada penelitian ini atau melakukan pelabelan prima dan koprima pada operasi korona graf berbeda maupun operasi graf yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] T. Harju, Graph Theory, Finland: Department of Mathematics University of Turku, 2012.

[2] H. Komarullah, I. Halikin and K. A. Santoso, "On the Minimum Span of Cone, Tadpole, and Barbell Graphs," in *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)*, Jember, 2022.

[3] I. Halikin and H. Komarullah, "Labelling of Generalized Friendship, Windmill, and Torch Graphs with a Condition at Distance Two," in *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021*, Jember, 2022.

[4] W. D. Wallis and A. Mar, Magic Graphs Second Edition, Boston: Birkhauser, 2013.

[5] D. Burton, Elementary Number Theory Fifth Edition, New York: McGraw-Hill, 2002.

[6] A. Berliner, N. Dean, J. Hook, A. Marr, A. Mbirika and C. D, "2016," *Coprime and Prime Labellings of Graphs,* no. 19, pp. 1-14, Journal of Integer Sequence.

[7] P. B. Pandya and N. P. Shrimali, "Vertex-edge neighborhood prime labeling of some graphs," *International Journal of Scientific Research and Review,* vol. 7, no. 10, pp. 735-743, 2018.

[8] S. Ashokkumar and S. Maragathavalli., "Prime labeling of some special graphs," *IOSR Journal of Mathematics,* vol. 11, no. 1, pp. 01-05, 2015.

[9] G. Prabhakaran, S. Vijayaraj and V. Ganesan, "Prime labeling of Franklin graph," *Journal Of Algebraic Statistics,* vol. 13, no. 2, pp. 466-473, 2022.

[10] J. Asplund and N. Fox, "2019," *Minimum Coprime Labellings of Generalized Petersen and Prism Graphs,* no. 19, pp. 1-17, Journal of Integer Sequence.

[11] C. Lee, "Minimum Coprime Graphs," *Journal of Integer Sequence,* no. 20, pp. 1-11, 2020.

[12] H. Komarullah, Slamin and K. Wijaya, "A Minimum Coprime Number for Amalgamation of Wheel," in *Proceedings of the International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)*, Jember, 2022.

[13] R. Frucht and H. F, "On the corona of two graphs," *Aequationes Mathematicae.,* no. 4, pp. 322-325, 1970.