LOMBA DAN SEMINAR MATEMATIKA XXX

Prosiding Pendidikan Matematika dan Matematika Volume 6 (2022)

e-ISSN No. 2721-6802

Pengembangan Teorema Japanese Pada Segienam

Nonong Wahyuni[1], Mashadi[2], Sri Gemawati[3]

Pascasarjana Matematika, Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau[1,2,3]

nonong.wahyuni7912@grad.unri.ac.id

Abstrak—Penelitian ini membahas tentang pengembangan Teorema Japanese pada segienam. Adapun titik yang dipilih untuk membentuk garis diagonal bebas dari titik mana saja, tidak hanya dari titik yang dapat membentuk segitiga atau segiempat yang sama. Dari garis diagonal tersebut membentuk segitiga-segitiga yang berbeda. Kemudian, dari segitiga-segitiga tersebut dapat dibentuk lingkaran dalam segitiga sehingga dengan menggunakan Teorema Carnot I dan Teorema Carnot II maka berlaku bahwa jumlah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga dari diagonal titik pertama sama dengan jumlah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga dari diagonal titik lainnya. Selain itu, penelitian ini juga membahas alternatif bukti pengembangan Teorema Japanese pada segienam dengan menggunakan Teorema Japanese. Garis diagonal yang dibentuk dari titik-titik yang dapat membentuk dua buah segiempat yang sama.

Kata kunci: Teorema Carnot I, Teorema Carnot II, dan Teorema Japanese.

I. PENDAHULUAN

Teorema Japanese ditemukan dalam sebuah artikel yang berjudul “Matematika Jepang” pada tahun 1906. Teorema tersebut tidak memilik nama. Teorema ini ditemukan pada tablet kayu yang bergantungan di Kuil Shinto yang menunjukkan bahwa hal tersebut merupakan kebiasaan umum di era Edo di Jepang. Oleh karena itu, teorema ini dinamakan Teorema Japanese [1,7,11].

Teorema Japanese dibentuk dari sebuah segiempat siklik dengan membentuk garis diagonal dari salah satu titik sehingga terbentuk dua buah segitiga. Jika dibentuk lingkaran dalam segitiga, berlaku bahwa jumlah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga dari diagonal titik pertama sama dengan jumlah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga dari diagonal titik lainnya [1,2].

Beberapa artikel yang membahas tentang Teorema Japanese, yaitu [9] dan [6]. Penelitian yang dilakukan pada [9] tahun 2002 membahas tentang pembuktian Teorema Japanese dengan menggunakan pengembangan Teorema Thebault’s. Sedangkan penelitian yang dilakukan pada [6] tahun 2012 membahas tentang pembuktian Teorema Japanese dan aplikasinya dengan menggunakan pengembangan Teorema Ptolemy.

Teorema Japanese dapat dikembangkan ke bentuk poligon siklik lainnya seperti segilima. Adapun artikel yang membahas tentang pengembangan Teorema Japanese pada segilima adalah [1] pada tahun 2004. Dalam artikel ini, pengembangan Teorema Japanese pada segilima dibentuk dengan garis diagonal dari titik-titik yang dapat membentuk segitiga dan segiempat yang sama sehingga dengan menggunakan pengembangan Teorema Ptolemy dan Teorema Japanese maka berlaku jumlah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga dari diagonal titik pertama sama dengan jumlah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga dari diagonal titik lainnya. Namun, artikel ini memiliki kekurangan, yaitu sulit untuk dibuktikan ketika garis diagonal yang dibentuk dari titik yang tidak dapat membentuk segitiga dan segiempat yang sama.

Oleh karena itu, pada penelitian ini penulis tertarik untuk membahas pengembangan Teorema Japanese pada segienam. Dalam pengembangan ini, penulis akan membentuk garis diagonal dari titik-titik yang tidak dapat membentuk segitiga dan segiempat yang sama. Kemudian, dengan menggunakan Teorema Carnot I dan Teorema Carnot II akan dibuktikan bahwa jumlah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga dari garis diagonal titik pertama sama dengan jumlah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga dari garis diagonal titik lainnya. Selain itu, penulis juga membahas alternatif bukti pengembangan Teorema Japanese

e-ISSN No. 2721-6802

pada segienam. Garis diagonal dibentuk dari titik-titik yang dapat membentuk dua buah segiempat yang sama dan akan dibuktikan dengan menggunakan Teorema Japanese.

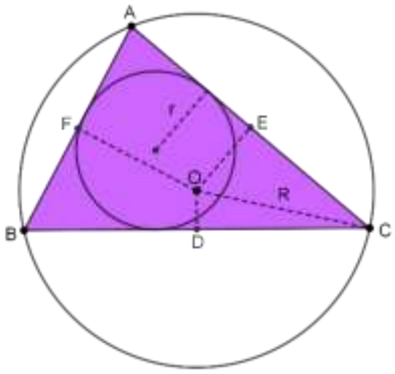
Manfaat penelitian ini adalah dapat menambah wawasan tentang ilmu matematika di bidang geometri, khususnya tentang pengembangan Teorema Japanese pada poligon siklik selain segiempat siklik.

II. METODE PENELITIAN

Pada metode penelitian ini akan dijelaskan beberapa teorema yang akan digunakan untuk mencapai tujuan penelitian, yaitu Teorema Carnot I, Teorema Carnot II, dan Teroema Japanese. Perbedaan Teorema Carnot I dan Teorema Carnot II didasari oleh jarak bertanda. Jika suatu titik berada pada bidang sama dengan suatu garis, jaraknya bertanda negatif. Namun, jika suatu titik berada pada bidang yang berbeda dengan suatu garis, jaraknya bertanda positif. Teorema Carnot I membahas tentang hubungan jumlah panjang jari-jari lingkaran luar dan lingkaran dalam dibandingkan terhadap panjang garis yang tegak lurus dari titik pusat lingkaran luar ke ketiga sisi segitiga. Titik pusat lingkaran luar berada di dalam segitiga sebarang tersebut [3,4,5,9]. Teorema ini digunakan untuk pembuktian Teorema Japanese [10].

Teorema 1. (Teorema Carnot I) Misalkan ABC adalah segitiga sebarang dengan O titik pusat lingkaran luar dan O sebarang titik dalam segitiga ABC. Jika dari titik O dibuat garis yang tegak lurus terhadap ketiga sisi segitiga, katakan titik potongnya masing-masing terhadap sumbu BC, AC dan AB adalah D, E dan F serta R dan r masing-masing adalah jari-jari lingkaran luar dan lingkaran dalam seperti pada GAMBAR 1 berlaku bahwa

$$OD + OE + OF = R + r.$$



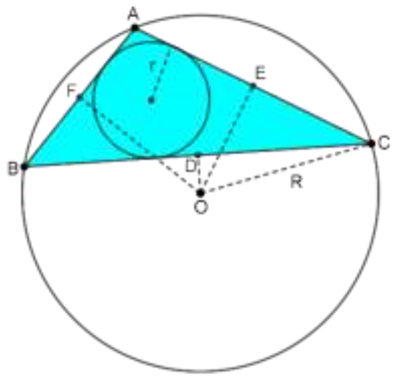
GAMBAR 1. TEOREMA CARNOT I PADA SEGITIGA *ABC*.

Sedangkan Teorema Carnot II membahas tentang hubungan jumlah panjang jari-jari lingkaran luar dan lingkaran dalam dibandingkan terhadap panjang garis yang tegak lurus dari titik pusat lingkaran luar ke ketiga sisi segitiga. Titik pusat lingkaran luar berada di luar segitiga sebarang tersebut [3,4,5,8]. Teorema ini digunakan untuk pembuktian Teorema Japanese [10].

Teorema 2. (Teorema Carnot II) Misalkan ABC adalah segitiga sebarang dengan O titik pusat lingkaran luar dan O sebarang titik diluar segitiga ABC. Jika dari titik O dibuat garis yang tegak lurus terhadap ketiga sisi segitiga, katakan titik potongnya masing-masing terhadap sumbu BC, AC, dan AB adalah D, E, dan F serta R dan r masing-masing adalah jari-jari lingkaran luar dan lingkaran dalam seperti pada GAMBAR 2 berlaku bahwa

$$OE + OF - OD = R + r.$$

e-ISSN No. 2721-6802

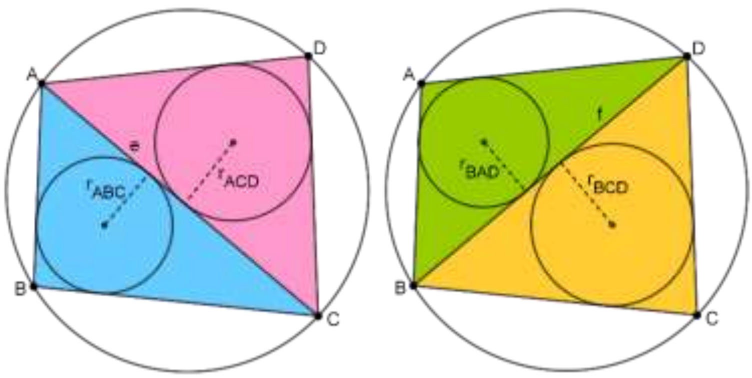


GAMBAR 2. TEOREMA CARNOT II PADA SEGITIGA *ABC*.

Kemudian, Teorema Japanese membahas tentang hubungan jumlah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga yang dibentuk dari diagonal pertama dibandingkan terhadap jumlah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga yang dibentuk dari diagonal titik lainnya pada segiempat siklik sebarang [2,6,9].

Teorema 3. (Teorema Japanese) Misalkan $ABCD$ adalah segiempat siklik sebarang dengan diagonal $AC = e$, $BD = f$ dan jari-jari lingkaran dalam untuk segitiga ABC, ACD, BAD, dan BCD masing-masing adalah r_{ABC}, r_{ACD}, r_{BAD}, dan r_{BCD} seperti pada GAMBAR 3 maka berlaku bahwa

$$r_{ABC} + r_{ACD} = r_{BAD} + r_{BCD}.$$



GAMBAR 3. TEOREMA JAPANESE PADA SEGIEMPAT *ABCD*.

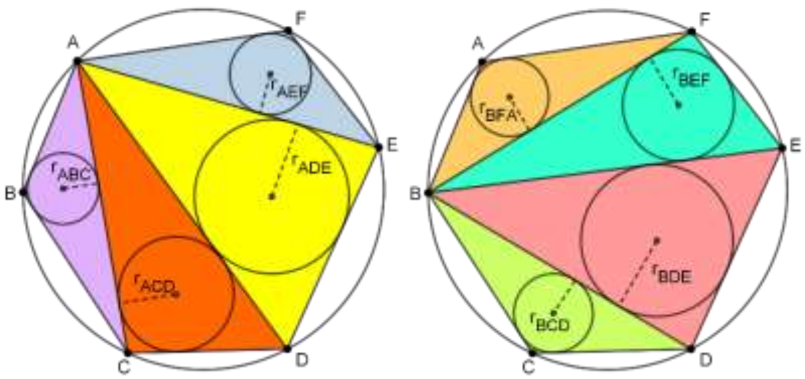
III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelumnya telah dibahas teorema-teorema pendukung untuk mencapai tujuan penelitian ini. Pada hasil dan pembahasan ini akan dijelaskan bukti pengembangan Teorema Japanese pada segienam dan alternatif bukti pengembangan Teorema Japanese pada segienam.

A. Pengembangan Teorema Japanese pada Segienam

Pada penelitian ini, pengembangan Teorema Japanese pada segienam yang dilakukan seperti pada GAMBAR 4 dan Teorema 4. Garis diagonal yang dibentuk adalah dari titik A ke titik C, D, dan E yaitu AC, AD, dan AE serta dari titik B ke titik D, E, dan F yaitu BD, BE, dan BF. Garis-garis diagonal tersebut membentuk segitiga ABC, ACD, ADE, AEF, BCD, BDE, BEF, dan BFA. Selanjutnya, dari segitiga-segitiga tersebut dibentuk lingkaran dalam segitiga dengan masing-masing jari-jarinya r_{ABC}, r_{ACD}, r_{ADE}, r_{AEF}, r_{BCD}, r_{BDE}, r_{BEF}, dan r_{BFA}. Kemudian, dengan menggunakan Teorema Carnot I dan Teorema Carnot II akan dibuktikan bahwa jumlah panjang r_{ABC}, r_{ACD}, r_{ADE}, dan r_{AEF} sama dengan jumlah panjang r_{BCD}, r_{BDE}, r_{BEF}, dan r_{BFA}.

e-ISSN No. 2721-6802



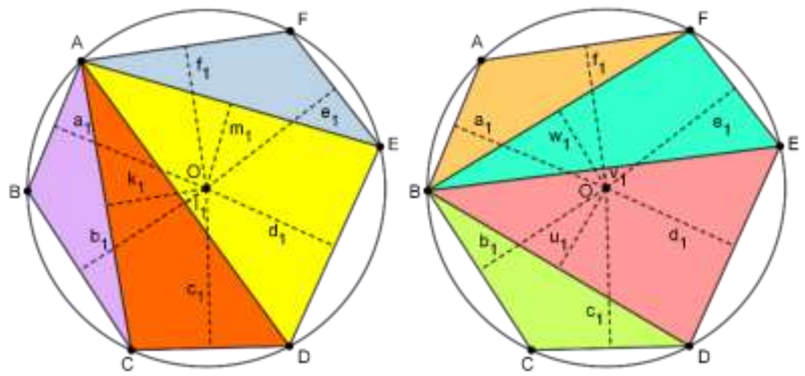
GAMBAR 4. TEOREMA JAPANESE PADA SEGIENAM ABCDEF.

Teorema 4. Misalkan $ABCDEF$ adalah segienam siklik sebarang dengan diagonal AC, AD, AE, BD, BE, dan BF serta jari-jari lingkaran dalam untuk segitiga ABC, ACD, ADE, AEF, BCD, BDE, BEF, dan BFA masing-masing adalah r_{ABC}, r_{ACD}, r_{ADE}, r_{AEF}, r_{BCD}, r_{BDE}, r_{BEF}, dan r_{BFA} maka berlaku bahwa

$$r_{ABC} + r_{ACD} + r_{ADE} + r_{AEF} = r_{BCD} + r_{BDE} + r_{BEF} + r_{BFA}.$$

Bukti:

Dari GAMBAR 5 di bawah ini, misalkan a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, k_1, l_1, m_1, u_1, v_1, dan w_1 adalah garis yang tegak lurus dari titik pusat lingkaran luar (O) ke masing-masing sisi AB, BC, CD, DE, EF, dan FA serta diagonal AC, AD, AE, BD, BE, dan BF.



GAMBAR 5. PENGEMBANGAN TEOREMA CARNOT I DAN TEOREMA CARNOT II PADA SEGIENAM ABCDEF.

Dengan memperhatikan ΔABC, ΔACD, ΔADE, dan ΔAEF pada GAMBAR 5 maka berdasarkan Teorema 1 (Teorema Carnot I) dan Teorema 2 (Teorema Carnot II) diperoleh

$$R + r_{ABC} = a_1 + b_1 - k_1 \quad (1)$$
$$R + r_{ACD} = k_1 + c_1 - l_1 \quad (2)$$
$$R + r_{ADE} = l_1 + d_1 + m_1 \quad (3)$$
$$R + r_{AEF} = e_1 + f_1 - m_1. \quad (4)$$

Jika persamaan (1), (2), (3), dan (4) dijumlahkan, akan diperoleh

$$r_{ABC} + r_{ACD} + r_{ADE} + r_{AEF} = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + f_1 - 4R. \quad (5)$$

Dengan memperhatikan ΔBCD, ΔBDE, ΔBEF dan ΔBFA pada GAMBAR 5 maka berdasarkan Teorema 1 (Teorema Carnot I) dan Teorema 2 (Teorema Carnot II) diperoleh

$$R + r_{BCD} = b_1 + c_1 - u_1 \quad (6)$$
$$R + r_{BDE} = u_1 + d_1 + v_1 \quad (7)$$
$$R + r_{BEF} = e_1 + w_1 - v_1 \quad (8)$$
$$R + r_{BFA} = a_1 + f_1 - w_1. \quad (9)$$

Jika persamaan (1), (2), (3), dan (4) dijumlahkan, akan diperoleh

$$r_{BCD} + r_{BDE} + r_{BEF} + r_{BFA} = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + f_1 - 4R. \quad (10)$$

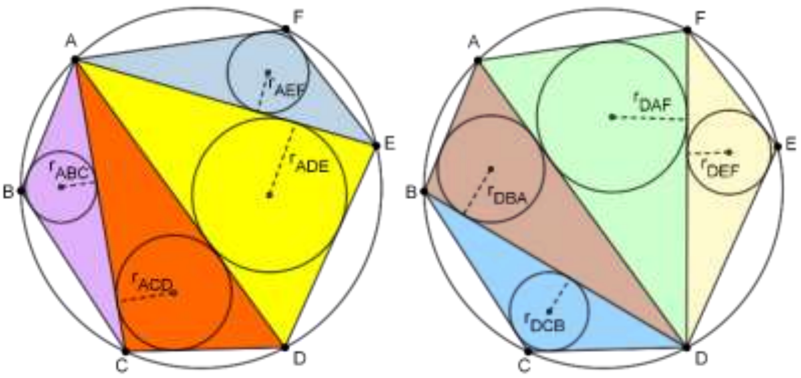
Dari persamaan (5) dan (10) maka berlaku bahwa

$$r_{ABC} + r_{ACD} + r_{ADE} + r_{AEF} = r_{BCD} + r_{BDE} + r_{BEF} + r_{BFA}.$$

Dengan cara yang sama seperti pada Teorema 4 di atas juga berlaku jika garis diagonal diambil dari titik C, D, E, atau F.

B. *Alternatif Bukti Pengembangan Teorema Japanese pada Segienam*

Untuk alternatif bukti pengembangan Teorema Japanese pada segienam penulis akan membentuk garis diagonal yang dapat membentuk dua buah segiempat yang sama seperti pada GAMBAR 6 dan Teorema 5. Garis diagonal yang dibentuk adalah dari titik A ke titik C, D, dan E yaitu AC, AD, dan AE serta dari titik D ke titik B, A, dan F yaitu DB, DA, dan DF. Garis-garis diagonal tersebut membentuk segiempat yang sama yaitu segiempat $ABCD$ dan $ADEF$ atau membentuk segitiga ABC, ACD, ADE, AEF, DCB, DBA, DAF, dan DFE. Selanjutnya, dari segitiga-segitiga tersebut dibentuk lingkaran dalam segitiga dengan masing-masing jari-jarinya r_{ABC}, r_{ACD}, r_{ADE}, r_{AEF}, r_{DCB}, r_{DBA}, r_{DAF}, dan r_{DFE}. Kemudian, dengan menggunakan Teorema Japanese pada segiempat $ABCD$ dan $ADEF$ akan dibuktikan bahwa jumlah panjang jar-jari r_{ABC}, r_{ACD}, r_{ADE}, dan r_{AEF} sama dengan jumlah panjang jari-jari r_{DCB}, r_{DBA}, r_{DAF}, dan r_{DFE}.



GAMBAR 6. ALTERNATIF BUKTI PENGEMBANGAN TEOREMA JAPANESE PADA SEGIENAM ABCDEF.

Teorema 5. Misalkan $ABCDEF$ adalah segienam siklik sebarang dengan diagonal AC, AD, AE, DB, DA, dan DF serta jari-jari lingkaran dalam untuk segitiga ABC, ACD, ADE, AEF, DCB, DBA, DAF, dan DFE masing-masing adalah r_{ABC}, r_{ACD}, r_{ADE}, r_{AEF}, r_{DCB}, r_{DBA}, r_{DAF}, dan r_{DFE} maka berlaku bahwa

$$r_{ABC} + r_{ACD} + r_{ADE} + r_{AEF} = r_{DCB} + r_{DBA} + r_{DAF} + r_{DFE}.$$

Bukti:
Dengan memperhatikan ΔABC, ΔACD, ΔDCB, dan ΔDBA pada GAMBAR 6 maka berdasarkan Teorema 3 (Teorema Japanese) diperoleh

$$r_{ABC} + r_{ACD} = r_{DCB} + r_{DBA} \tag{11}$$

Dengan memperhatikan ΔADE, ΔAEF, ΔDAF, dan ΔDFE pada GAMBAR 6 maka berdasarkan Teorema 3 (Teorema Japanese) diperoleh

$$r_{ADE} + r_{AEF} = r_{DAF} + r_{DFE} \tag{12}$$

Jika persamaan (11) dan (12) dijumlahkan berlaku bahwa

$$r_{ABC} + r_{ACD} + r_{ADE} + r_{AEF} = r_{DCB} + r_{DBA} + r_{DAF} + r_{DFE}.$$

IV. SIMPULAN DAN SARAN

A. *Simpulan*

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka disimpulkan bahwa Teorema Japanese dapat dikembangkan ke bentuk segienam sebarang $ABCDEF$. Titik yang dipilih untuk membentuk garis diagonal bebas dari titik mana saja, tidak hanya titik yang dapat membentuk segiempat yang sama yaitu titik A ke titik C, D dan E membentuk diagonal AC, AD, dan AE serta dari titik B ke titik D, E, dan F membentuk diagonal BD, BE, dan BF. Garis-garis diagonal tersebut membentuk segitiga ABC, ACD, ADE, AEF, BCD, BDE, BEF, dan BFA. Dari segitiga-segitiga tersebut dibentuk lingkaran dalam segitiga dengan masing-masing jari-jarinya r_{ABC}, r_{ACD}, r_{ADE}, r_{AEF}, r_{BCD}, r_{BDE}, r_{BEF}, dan r_{BFA}. Dengan menggunakan Teorema Carnot I dan Teorema

Carnot II maka berlaku bahwa jumlah panjang r_{ABC}, r_{ACD}, r_{ADE}, dan r_{AEF} sama dengan jumlah panjang r_{BCD}, r_{BDE}, r_{BEF}, dan r_{BFA}.

Selain itu, Teorema Japanese juga berlaku pada segienam sebarang $ABCDEF$ dengan membentuk segiempat yang sama. Garis diagonal yang dibentuk adalah dari titik A ke titik C, D, dan E yaitu AC, AD, dan AE serta dari titik D ke titik B, A, dan F yaitu DB, DA, dan DF. Garis-garis diagonal tersebut membentuk segiempat yang sama yaitu segiempat $ABCD$ dan $ADEF$ atau membentuk segitiga ABC, ACD, ADE, AEF, DCB, DBA, DAF, dan DFE. Dari segitiga-segitiga tersebut dibentuk lingkaran dalam segitiga dengan masing-masing jari-jarinya r_{ABC}, r_{ACD}, r_{ADE}, r_{AEF}, r_{DCB}, r_{DBA}, r_{DAF}, dan r_{DFE}. Dengan menggunakan Teorema Japanese pada segiempat $ABCD$ dan $ADEF$ maka berlaku bahwa jumlah panjang jar-jari r_{ABC}, r_{ACD}, r_{ADE}, dan r_{AEF} sama dengan jumlah panjang jari-jari r_{DCB}, r_{DBA}, r_{DAF}, dan r_{DFE}.

B. Saran

Adapun saran lebih lanjut mengenai potensi yang bisa dikembangkan dari hasil penelitian ini adalah mencari alternatif bukti lainnya untuk Teorema Japanese pada segienam atau pengembangan Teorema Japanese pada bentuk poligon siklik lainnya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih penulis ucapkan kepada bapak Prof. Dr. Mashadi, M.Si dan ibu Dr. Sri Gemawati, M.Si atas bimbingan untuk penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] M. Ahuja, W. Uegaki dan K. Matsushita, vol. 16, Japanese Theorem: A little known thorem with many proofs – Part I, Missouri Journal of Mathematical Science, 2004, pp. 72-81.

[2] M. Ahuja, W. Uegaki dan K. Matsushita, vol. 16, Japanese Theorem: A little known thorem with many proofs – Part II, Missouri Journal of Mathematical Science, 2004, pp. 149-158.

[3] A. Claudi dan B. N. Roger, Proof without words: Carnot's Theorema for acute triangles, vol. 39, The College Mathematics Journal, pp. 111.

[4] Mashadi, Geometri Edisi Kedua, UR Press, Pekanbaru, 2015.

[5] Mashadi, Geometri Lanjut, UR Press, Pekanbaru, 2015.

[6] N. Minculete, C. Barbu, dan G. Szollosy, About the Japanese Theorem, vol 38, Crux Mathematicorum, 2012, pp 188-193.

[7] T. Ogawa, A riview if the history of Japanese Mathematics, vol. 7, Societe Mathematique De France, 2001, pp. 137-155.

[8] F. Perrier, Carnot's Theorem in Trigonometric Disguise, vol. 91, The Mathematical Gazette, 2007, pp. 115-117.

[9] W. Reyes, An Application of Thebault's Theorem, vol. 2, Forum Geometricorum, 2002, pp.183-185.

[10] D. Richeson, The Japanese Theorem for Nonvoncex Polygons-Carnot's Theorem, Convergence, 2013.

[11] W. Uegaki, On the Origin and History of the Japanese Theorem, Departmental Bulletin Paper, Mie University Scholarly E-Collections, 2001.