LOMBA DAN SEMINAR MATEMATIKA XXIX
Prosiding Pendidikan Matematika dan Matematika Volume 3 (2021)
e-ISSN No. 2721-6802

Penyederhanaan *Rational Distance Problem* dengan Pendekatan Geometri Analitik

Yasin Prasetia[1]
Genio Institute[1]
prasetiayasin@gmail.com

Abstrak—Salah satu masalah yang belum terpecahkan dalam teori bilangan dan geometri adalah *rational distance problem*. Masalah ini pertama kali dipublikasikan oleh Richard K. Guy dalam bukunya yang berjudul *Unsolved Problems in Number Theory*, yaitu dalam bidang yang sama dengan suatu persegi satuan, apakah terdapat suatu titik yang berjarak rasional terhadap keempat titik sudut persegi tersebut. Paper ini tidak bertujuan membuktikan atau menyanggah keberadaan titik ini, namun paper ini bertujuan mengkaji dan menemukan kasus spesifik mengenai masalah ini. Dalam paper ini, penulis menggunakan pendekatan geometri analitik, prinsip paritas, dan kongruensi modulo. Kontruksi dibangun pada bidang kartesius dengan mengasumsikan terdapat suatu titik $P(a,b)$ di dalam atau di luar persegi satuan dengan koordinat (0,0), (0,1), (1,0), dan (1,1). Dengan kondisi tersebut, haruslah a dan b rasional. Dengan menggunakan rumus jarak, prinsip paritas, serta kongruensi modulo 4 dan modulo 8, ditemukan bahwa sebagian besar kasus yang mungkin dalam kontruksi ini berakhir dengan kontradiksi. Hasilnya ditemukan satu kasus spesifik tentang keberadaan titik ini yang tidak kontradiksi dengan beberapa fakta yang diperoleh atau dikonstruksikan sebelumnya. Kasus spesifik yang diperoleh adalah persegi satuan dan titik tersebut dapat dikenai suatu transformasi sedemikian sehingga jarak antara titik tersebut terhadap keempat titik sudut persegi satuan yang telah ditransformasi merupakan bilangan ganjil, serta panjang sisi dari persegi setelah ditransformasi merupakan bilangan genap kelipatan 4. Untuk mengkaji kasus spesifik ini lebih lanjut, diperlukan konsep lain seperti konsep *Primitive Pythagorean Triple* yang dapat dibangun dari dua bilangan asli yang relatif prima beserta sifat-sifatnya dan beberapa kasus khusus yang dapat ditimbulkan akibat hasil yang diperoleh sebelumnya.

Kata kunci: modulo, paritas, rational distance problem

I. PENDAHULUAN

Geometri merupakan salah satu cabang matematika yang terkait dengan objek dan pengukuran. Objek-objek dalam geometri dapat kita kaitkan dengan bilangan yang menyatakan jarak maupun koordinat dalam bidang. Berbagai permasalahan baru terus bermunculan seiring dengan perkembangan ilmu matematika. Beberapa permasalahan tersebut sudah terpecahkan, namun masih banyak permasalahan yang sampai saat ini belum terpecahkan. Koneksi antar beberapa konsep matematika sangat diperlukan untuk merancang alternatif penyelesaian masalah-masalah tersebut. Dalam paper ini, penulis akan fokus kepada permasalahan yang diajukan oleh Richard K. Guy dalam bukunya yang berjudul *Unsolved Problems in Number Theory* yaitu *rational distance problem* yang menanyakan apakah dalam suatu bidang yang sama dengan persegi satuan terdapat suatu titik di dalam atau di luar persegi satuan yang berjarak rasional terhadap keempat titik sudut persegi tersebut. Berbagai pendekatan telah dicoba untuk menggeneralisasi dan memecahkan persoalan ini. Menurut [1], jika T adalah segitiga sama sisi dengan panjang 1 satuan, maka terdapat titik yang berjarak rasional terhadap ketiga sudut T. Berdasarkan [3], terdapat penjelasan mengenai bentuk khusus dari persamaan *diophantine* yang merepresentasikan *rational distance problem* dan memperkuat dugaan bahwa tidak terdapat titik baik di dalam maupun di luar persegi satuan yang berjarak rasional terhadap keempat titik sudut persegi tersebut. Sadeq dalam [6] mendata beberapa kasus khusus dan pada kasus-kasus yang didata, tidak terdapat titik yang dimaksud. Kajian-kajian di atas menghasilkan dugaan *negative solution* untuk *rational distance problem*. Walaupun demikian, hingga saat ini eksistensi titik tersebut masih belum dapat ditentukan secara pasti. Salah satu cara untuk memecahkan permasalahan ini adalah dengan mengasumsikan bahwa titik tersebut ada, kemudian mencari apakah terdapat kontradiksi dengan asumsi lain yang kita bangun. Kalau memang tidak diperoleh adanya kontradiksi, maka kita akan mendapatkan sifat atau kasus spesifik yang berguna untuk mencari titik tersebut atau melihat adanya kontradiksi yang lain. Dalam paper ini, penulis akan menunjukkan jika diasumsikan titik tersebut ada, maka kita dapat menerapkan transformasi geometri pada persegi satuan dan titik tersebut sehingga jarak P dengan keempat titik sudut persegi hasil transformasi merupakan bilangan bulat. Karena untuk menemukan gambaran tersebut diperlukan pembagian kasus serta dalam serangkaian proses deduksi diperoleh bahwa hanya ada satu kasus yang tidak menghasilkan kontradiksi dengan asumsi-asumsi yang dibangun sebelumnya, maka kasus tersebut dalam paper ini disebut sebagai kasus spesifik. Kasus spesifik ini adalah hasil dari eliminasi kasus-kasus lain yang kontradiksi dengan asumsi yang dibangun sebelumnya yang berguna untuk kajian lebih lanjut mengenai *rational distance problem*.

Penulis memandang perlu untuk mengkaji masalah ini untuk memperluas pembahasan dan kajian tentang geometri dan teori bilangan. Beberapa masalah geometri dapat diselesaikan dengan pendekatan teori bilangan dan beberapa masalah teori bilangan dapat diselesaikan dengan pendekatan geometri sehingga dapat ditemukan keterkaitan antara konsep geometri dan teori bilangan. Rumusan masalah yang diajukan dalam paper ini adalah bagaimana kasus spesifik mengenai keberadaan titik pada rational distance problem. Tujuan dari paper ini adalah menemukan kasus spesifik mengenai keberadaan titik pada rational distance problem.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Guy dalam [5] mengkategorikan *rational distance problem* ke dalam bab *Diophantine Equation* . Beberapa kajian telah dilakukan untuk memecahkannya. Berry dalam [3] menunjukkan bahwa terdapat tak berhingga titik yang berjarak rasional terhadap tiga titik sudut persegi satuan. Sadeq dalam [6] menunjukkan bahwa tidak terdapat titik baik di dalam maupun di luar persegi satuan yang berjarak rasional terhadap keempat titik sudut persegi satuan itu pada beberapa kasus spesifik. Misalkan $P(x,y) \in \mathbb{R}^2$ merupakan titik yang berjarak bulat terhadap titik sudut persegi dengan panjang sisi n untuk suatu bilangan bulat n., maka: (1) titik P tidak mungkin terletak pada diagonal persegi, (2) titik P tidak mungkin terletak pada lingkaran luar persegi, (3) titik P tidak mungkin terletak pada lingkaran dalam persegi, dan (4) untuk suatu $C\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$ dan $R = \frac{nL}{M}$ dengan L^2 adalah bilangan asli dan M^2 adalah bilangan asli bukan kelipatan 3, maka P tidak mungkin terletak pada lingkaran yang berpusat di C dan panjang jari-jarinya R. Berdasarkan kajian-kajian di atas, muncul suatu dugaan bahwa tidak ada titik yang demikian. Namun sejauh ini belum ada yang berhasil membuktikan secara pasti mengenai ada atau tidaknya titik ini sebagaimana dalam [4] yang menyatakan bahwa *rational distance problem* masih belum terpecahkan.

Sebagaimana dijelaskan sebelumnya, salah satu cara untuk memecahkan permasalahan ini adalah dengan mengasumsikan bahwa titik tersebut ada, kemudian mencari apakah terdapat kontradiksi dengan asumsi lain yang kita bangun. Untuk mendapatkan fakta lebih lanjut, konstruksikan persegi satuan $ABCD$ pada bidang dengan koordinat $A(0,1), B(1,1), C(1,0)$, dan $D(0,0)$. Definisikan $d_{P,Q}$ sebagai jarak titik P dan Q. Andaikan terdapat titik $P(x,y)$ di dalam atau di luar persegi tersebut sehingga $d_{P,A}, d_{P,B}, d_{P,C}, d_{P,D}$ semuanya rasional.

Dengan menggunakan rumus jarak, diperoleh $d_{P,A} = \sqrt{a^2+(b-1)^2}, d_{P,B} = \sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}$, $d_{P,c} = \sqrt{(a-1)^2+b^2}$, dan $d_{P,D} = \sqrt{a^2+b^2}$. Akibatnya, jelas bahwa a^2+b^2 merupakan kuadrat dari bilangan rasional, sehingga $a^2+b^2 = \frac{p^2}{q^2}$, untuk suatu p, q bilangan asli.

Jelas bahwa $\left(d_{P,C}\right)^2 = a^2 - 2a + 1 + b^2 = \frac{p^2+q^2}{q^2} - 2a$ merupakan bilangan rasional, sehingga a adalah bilangan rasional. Analog, $\left(d_{P,B}\right)^2 = a^2 + b^2 - 2(a+b) + 2 = \frac{p^2+2q^2}{q^2} - 2(a+b)$ merupakan bilangan rasional, sehingga b juga bilangan rasional. Karena a, b bilangan rasional maka $a = \frac{c}{d}, b = \frac{e}{f}$ dengan a, b, c, d bilangan bulat, d, f tak nol dan $FPB(c,d) = FPB(e,f) = 1$.

Jelas bahwa $a^2 + b^2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{(fc)^2+(de)^2}{(df)^2}$ (1)

Jelas, $\left(d_{P,C}\right)^2 = \left(\frac{c-d}{d}\right)^2 + \left(\frac{e}{f}\right)^2 = \frac{f^2c^2+e^2d^2+f^2d^2-2cdf^2}{d^2f^2} = \frac{p^2+(fd)^2-2cdf^2}{d^2f^2}$ sehingga kita peroleh bahwa $p^2 + (fd)^2 - 2cdf^2 = k^2$, untuk suatu bilangan asli k. (2)

Jelas, $\left(d_{P,A}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{e-f}{f}\right)^2 = \frac{f^2c^2+e^2d^2+f^2d^2-2efd^2}{d^2f^2} = \frac{p^2+(fd)^2-2efd^2}{d^2f^2}$ sehingga kita peroleh bahwa $p^2 + (fd)^2 - 2efd^2 = l^2$, untuk suatu bilangan asli l. (3)

Jelas, $\left(d_{P,B}\right)^2 = \left(\frac{c-d}{d}\right)^2 + \left(\frac{e-f}{f}\right)^2 = \frac{(fc)^2+(fd)^2-2cdf^2+(de)^2+(df)^2-2efd^2}{(df)^2} = \frac{k^2+l^2-p^2}{q^2}$ sehingga kita peroleh bahwa $k^2 + l^2 - p^2 = s^2$, untuk suatu bilangan asli s. (4)

e-ISSN No. 2721-6802

Dengan mengurangkan (2) – (3), didapat $(k+l)(k-l)=2fd(de-fc)$. Karena paritas dari $k+l$ dan $k-l$ sama dan ruas kanan dari persamaan tersebut genap, maka haruslah $k+l$ dan $k-l$ genap. Akibatnya, paritas k dan l haruslah sama. Jadi, hanya ada dua kasus yaitu k dan l genap atau k dan l ganjil.

Selanjutnya, perlu diperhatikan mengenai sifat-sifat bilangan kuadrat. Sifat-sifat bilangan kuadrat dapat dilihat pada lemma berikut ini.

Lemma 1. Setiap kuadrat dari bilangan bulat dapat dinyatakan sebagai 1 (mod 4) atau 0 (mod 4).

Bukti:

Jelas, setiap bilangan bulat n dapat dinyatakan sebagai $2m$ atau $2m-1$. Jika $n=2m$, maka $n^2=4m^2$. Jika $n=2m-1$, maka $n^2=4m^2-4m+1$.
Jadi, terbukti bahwa setiap kuadrat dari bilangan bulat dapat dinyatakan sebagai 1 (mod 4) atau 0 (mod 4).

Karena paritas k dan l sama, maka kita dapat membagi permasalahan di atas menjadi dua kasus, yaitu jika k dan l keduanya genap, serta jika k dan l keduanya ganjil.

A. *Jika k dan l keduanya genap*

- Jika p ganjil dan f genap, maka berdasarkan (1) diperoleh d dan e harus ganjil. Akibatnya, persamaan (2) menjadi $k^2=p^2+(fd)^2-2fc(fd)\equiv 1+0+0=1$ (mod 4) yang kontradiksi dengan k genap.
- Jika p dan f ganjil, c genap, maka berdasarkan (1) diperoleh d dan e harus ganjil. Akibatnya, persamaan (2) menjadi $k^2=p^2+(fd)^2-2fc(fd)\equiv 1+1+0=2$ (mod 4) yang kontradiksi dengan Lemma 1.
- Jika $p, f,$ dan c ganjil, maka berdasarkan (1) haruslah d atau e ganjil. Jika d genap dan e ganjil atau jika d dan e genap, maka persamaan (3) menjadi $p^2+(fd)^2-2de(fd)\equiv$ 1 + 0 – 0 = 1 (mod 4) yang kontradiksi dengan l genap. Jika e genap dan d ganjil, maka persamaan (3) ekuivalen dengan 2 (mod 4) yang kontradiksi dengan Lemma 1.
- Jika $p, f,$ dan c genap, maka berdasarkan (1), d atau e haruslah genap. Menggunakan argumen yang sama dengan poin ketiga diperoleh suatu kontradiksi.
- Jika p dan f genap, c ganjil, maka berdasarkan (1), d atau e haruslah genap. Menggunakan argumen yang sama dengan poin ketiga diperoleh suatu kontradiksi.
- Jika p genap, f dan c ganjil, maka berdasarkan (1), d dan e harus ganjil. Akibatnya, persamaan (1) akan menjadi $p^2=(fc)^2+(de)^2\equiv 1+1=2$ (mod 4) yang kontradiksi dengan Lemma 1.
- Jika p dan c genap, f ganjil, maka d atau e harus genap. Menggunakan argumen yang sama dengan poin ketiga diperoleh suatu kontradiksi.

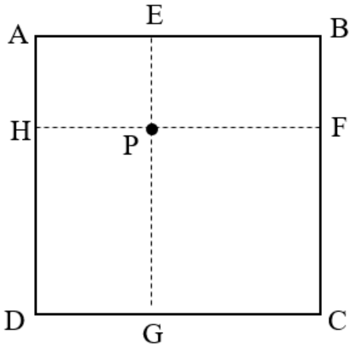
B. *Jika k dan l keduanya ganjil*

Jika k dan l ganjil, berdasarkan (4) haruslah p ganjil. Jelas, $k^2-l^2=2fd(de-fc)\equiv 0$ (mod 8). Jadi, hanya ada dua kasus yaitu fd dan $de-fc$ genap atau tepat satu di antara mereka ganjil dan yang lainnya kelipatan 4.

- Jika fd dan $de-fc$ genap, maka minimal satu dari f atau d genap serta de dan fc memiliki paritas yang sama. Karena p ganjil, maka berdasarkan (1), tidak mungkin f dan d genap. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan f genap dan d ganjil. Karena $de-fc$ genap, maka e genap. Akibatnya p haruslah genap. Kontradiksi dengan p ganjil.
- Jika fd ganjil dan $de-fc$ kelipatan 4, maka f dan d ganjil. Karena p ganjil, maka c genap dan e ganjil atau sebaliknya. Namun hal ini mengakibatkan $de-fc$ ganjil yang kontradiksi dengan asumsi bahwa $de-fc$ kelipatan 4.
- Jika fd kelipatan 4 dan $de-fc$ ganjil, maka tidak mungkin f dan d genap. Akibatnya haruslah tepat satu f atau d kelipatan 4. Dengan menjumlahkan (2) and (3), kita mendapatkan persamaan $2p^2+2(fd)^2-2fd(fc+de)=k^2+l^2$. Berdasarkan (4) dan dengan metode subtitusi, diperoleh $p^2+2(fd)^2-2fd(fc+de)=s^2$. Kita dapat memandang bahwa fd adalah salah satu solusi dari persamaan $2x^2-2(fc+de)x+p^2-s^2=0$. Menggunakan teorema Vieta, diperoleh bahwa jumlah kedua akarnya adalah $\frac{2(fc+de)}{2}=fc+de$, yang merupakan bilangan ganjil. Jadi, akar yang lain adalah $f(c-d)+de$ merupakan bilangan ganjil. Hal ini merupakan kalimat terbuka yang tidak kontradiksi dengan asumsi-asumsi lain yang dibangun sebelumnya. Akibatnya, seandainya memang

terdapat titik tersebut, maka pasti akan memenuhi sifat k dan l ganjil, fd kelipatan 4, dan $de - fc$ ganjil. Inilah kasus spesifik yang dimaksud. Selanjutnya, akan diaplikasikan suatu transformasi pada persegi satuan ABCD dan titik tersebut sehingga panjang keempat sisinya merupakan bilangan bulat dan jarak titik tersebut terhadap keempat titik sudut persegi setelah ditransformasikan juga merupakan bilangan bulat.

Misalkan suatu transformasi diaplikasikan kepada persegi tersebut sehingga panjang AB menjadi fd, AP = l, BP = s, CP = k, dan DP = p. Situasi ini dapat diilustrasikan pada gambar berikut ini.



GAMBAR 1. SITUASI SETELAH DITRANSFORMASIKAN

Perhatikan bahwa kita telah mendapatkan kasus spesifik bagi permasalahan *rational distance problem*. Selanjutnya, kita dapat memandang persegi di atas sebagai gabungan dari beberapa segitiga siku-siku sehingga kita memerlukan konsep tripel Pythagoras. Ada beberapa hal yang perlu digaris bawahi, yaitu kita akan mencari persegi terkecil yang memungkinkan adanya titik P, atau mendapatkan fakta tertentu yang membuktikan ketiadaan titik P.

Untuk menginvestigasi lebih lanjut, kita memerlukan konsep tentang *Primitive Pythagorean Triple*. Menurut [7], tripel (a, b, c) disebut *Primitive Pythagorean Triple (PPT)* jika (a, b, c) adalah tripel Pythagoras yang komponennya tidak memiliki faktor persekutuan $k > 1$. Selanjutnya, mereka menyatakan setiap tripel Pythagoras dapat dituliskan dalam bentuk $(4k, q - p, q + p)$ dengan $pq = 4k^2$ dan akan menjadi PPT jika dan hanya jika p, q relatif prima. Akibatnya, unsur yang genap haruslah kelipatan 4.

Tanpa mengurangi keumuman, andaikan titik P ada, kita set DG sebagai kelipatan 4. Kita dapatkan PG dan DP ganjil. Jelas pula bahwa GC kelipatan 4, PG dan PC ganjil. Kita juga memberikan klaim bahwa sisi yang ganjil pada PPT akan ekuivalen dengan 1 (mod 4) berdasarkan lemma berikut ini.

Lemma 2. Bilangan asli a, b, c dengan a genap akan membentuk PPT jika dan hanya jika terdapat bilangan asli s, t yang relatif prima sehingga $t > s > 0$, tepat satu di antara mereka genap, dan memenuhi:

$$a = 2st, \qquad b = t^2 - s^2, \qquad c = t^2 + s^2$$

Bukti:

Misalkan (a, b, c) dengan a genap merupakan PPT. Jelas bahwa hipotenusa dari PPT pasti ganjil. Jelas bahwa $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$. Karena b, c ganjil, maka $c + b$ dan $c - b$ genap, akibatnya diperoleh $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{(c+b)}{2}\frac{(c-b)}{2}$. Jika d adalah faktor prima persekutuan dari keduanya, pastilah d adalah faktor dari b dan c.

Karena tripel tersebut adalah PPT, maka $d = 1$. Karena hasil kalinya merupakan bilangan kuadrat, maka berdasarkan Teorema Fundamental Aritmetika, terdapat bilangan asli s, t yang relatif prima sedemikian sehingga $\frac{c+b}{2} = t^2$ dan $\frac{c-b}{2} = s^2$. Akibatnya, diperoleh $b = t^2 - s^2,\ c = t^2 + s^2$, and $a = 2ts$. Jika paritas t dan s sama , maka b dan c genap dan kontradiksi dengan asumsi PPT. Jelas, dikarenakan $b = t^2 - s^2 > 0$ maka didapat $t > s > 0$.

Untuk konversnya, misalkan s, t bilangan asli yang relatif prima sehingga $t > s > 0$ dan tepat satu di antaranya genap. Jelas, diperoleh bahwa:

$$a^2 + b^2 = (2st)^2 + (t^2 - s^2)^2 = t^4 + 2s^2t^2 + s^4 = (t^2 + s^2)^2 = c^2.$$

Andaikan tripel itu bukan PPT, maka FPB$(b, c) = d \neq 1$. Setiap faktor dari b dan c harus membagi jumlah maupun selisihnya yaitu $2t^2$ and $2s^2$. Karena c ganjil maka $d \neq 2$. Karena FPB$(s, t) = 1$, maka $d = 1$.

Kontradiksi dengan $d \neq 1$. Jadi, terbukti bahwa bilangan asli a, b, c dengan a genap akan membentuk PPT jika dan hanya jika terdapat bilangan asli s, t yang relatif prima sehingga $t > s > 0$, tepat satu di antara mereka genap, dan memenuhi $a = 2st,\ b = t^2 - s^2,\ c = t^2 + s^2$.

Menurut [7], terdapat beberapa sifat yang berkaitan dengan PPT, yaitu: (1) unsur genap pada PPT berbentuk $4k$, untuk suatu bilangan asli k; (2) setiap pasangan bilangan asli (p, q) yang relatif prima sedemikian sehingga $pq = 4k^2$ dan $0 < p < q$ akan membangun suatu PPT berbentuk $(4k, q - p, q + p)$; (3) setiap tripel Pythagoras dapat dituliskan dalam bentuk $(4k, q - p, q + p)$ dengan $pq = 4k^2$ dan merupakan PPT jika p, q relatif prima; dan (4) jika faktorisasi prima dari $a = 4k$ adalah $2^{x_0} \prod_{i=1}^{m} p_i^{x_i}$, maka tepat terdapat 2^m PPT yang mempunyai a sebagai unsur genapnya. Pada gambar 1 terlihat beberapa segitiga siku-siku yang bisa kita amati. Sekarang ditinjau seandainya semua segitiga siku-siku yang terbentuk pada gambar 1 memiliki panjang sisi yang merupakan PPT. Berdasarkan hasil pada poin keempat dan kasus spesifik yang diperoleh sebelumnya serta jika kita asumsikan panjang DG adalah bilangan genap, maka pastilah panjang sisi DG adalah $2^{x_0} \prod_{i=1}^{m} p_i^{x_i}$ untuk suatu $m \geq 1$. Hal yang sama berlaku juga untuk ruas garis GC.

Jika kita mengkombinasikan Lemma 1 dan Lemma 2, kita akan mendapatkan fakta bahwa sisi ganjil pada PPT akan ekuivalen dengan 1 (mod 4). Namun perlu diperhatikan bahwa masih belum jelas apakah keempat segitiga siku-siku yang membentuk persegi $ABCD$ pada gambar 1 panjang sisi-sisinya merupakan PPT atau tidak karena bisa jadi terdapat segitiga siku yang panjang sisi-sisinya bukan PPT, namun masih memenuhi tripel Pythagoras.

Kasus yang dapat diselidiki lebih lanjut adalah: (1) jika di antara segitiga siku-siku DGP, GCP, AEP, dan BEP tidak terdapat segitiga yang panjang sisinya merupakan PPT; (2) jika di antara segitiga siku-siku DGP, GCP, AEP, dan BEP terdapat satu segitiga yang panjang sisinya merupakan PPT; (3) jika di antara segitiga siku-siku DGP, GCP, AEP, dan BEP terdapat dua segitiga yang panjang sisinya merupakan PPT; (4) jika di antara segitiga siku-siku DGP, GCP, AEP, dan BEP terdapat tiga segitiga yang panjang sisinya merupakan PPT; dan (5) jika semua segitiga siku-siku DGP, GCP, AEP, dan BEP panjang sisinya merupakan PPT. Untuk kasus (2), (3), dan (4) perlu diperhatikan juga konfigurasi segitiga yang panjang sisinya merupakan PPT sehingga akan ada sub kasus lagi. Langkah selanjutnya serupa dengan langkah yang dilakukan dalam paper ini, yaitu mengeliminasi semua kasus yang kontradiksi. Jika semua kasus (1) sampai (5) menghasilkan kontradiksi dengan asumsi yang sudah dibangun sebelumnya, maka kita dapatkan *negative solution* untuk *rational distance problem*. Jika tidak, maka kita akan kembali mendapatkan kasus spesifik lagi untuk investigasi selanjutnya.

III. SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan di atas, ditemukan kasus spesifik mengenai keberadaan titik P dengan mengaplikasikan transformasi khusus yang menyebabkan persegi tersebut memiliki panjang sisi bulat dan kelipatan 4. Jarak dari masing-masing titik sudut persegi ke titik P merupakan bilangan ganjil. Selain itu, jika ditinjau kasus bahwa semua segitiga siku-siku yang terbentuk pada gambar 1 memiliki panjang sisi yang merupakan PPT serta jika kita asumsikan panjang DG adalah bilangan genap, maka pastilah panjang sisi DG adalah $2^{x_0} \prod_{i=1}^{m} p_i^{x_i}$ untuk suatu $m \geq 1$. Hal yang sama berlaku juga untuk ruas garis GC. Namun masih terdapat kemungkinan lain yaitu tidak semua segitiga siku-siku yang terbentuk pada gambar 1 memiliki panjang sisi yang membentuk PPT, dengan kata lain terdapat segitiga siku-siku yang memiliki panjang sisi membentuk tripel Pythagoras yang bukan PPT.

Saran untuk kajian selanjutnya adalah memberikan pembagian kasus lagi berdasarkan kasus spesifik tadi, terutama menyelidiki berapa banyak segitiga siku-siku yang sisi-sisinya merupakan PPT dan menyelidiki pula apakah terdapat kontradiksi dengan asumsi tersebut. Jika semua kasus berakhir dengan kontradiksi, maka diperoleh jawaban *negative solution* untuk *rational distance problem.* Jika ada yang tidak kontradiksi, maka diharapkan penyelidikan lebih mendalam akan menghasilkan fakta-fakta baru yang membantu menemukan titik P seandainya memang titik tersebut ada.

UCAPAN TERIMA KASIH

Saya mengucapkan terima kasih kepada rekan sejawat, dosen, guru dan senior yang memberikan saran serta masukan kepada saya dalam menyusun paper ini. Tak lupa juga ucapan terima kasih yang mendalam kepada keluarga atas dukungan yang diberikan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Barbara, R. Points at Rational Distance from The Vertices of A Unit Polygon, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, Vol. 35 No. 2, pp 209-215, 2009

[2] Barbara, R & Karam A., The Rational Distance Problems for Equilateral Triangles, Communications in Mathematics and Applications,Vol. 9, No. 2, pp. 139–145, 2018

[3] Berry, T. G., Points at Rational Distance from The Corners of A Unit Square, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 17(4), 505-529, 1990

[4] Bremner, A., & Ulas, M., Points at Rational Distances from The Vertices of Certain Geometric Objects, Journal of Number Theory, 158, 104-133, 2016

[5] Guy, Richard K. , Unsolved Problems in Number Theory. New York: Springer-Verlak, 2004

[6] Sadeq, Joseph G., Points at Rational Distance from the Vertices of a Square. (Master's Thesis). George Mason University: Fairfax, 2015

[7] Watson, J. D., & Comella, J. J., Pythagorean Triples: What Kind? How Many?. The Mathematics Teacher, 69(2), 108-110, 1976