LOMBA DAN SEMINAR MATEMATIKA XXIX
Prosiding Pendidikan Matematika dan Matematika Volume 3 (2021)
e-ISSN No. 2721-6802

Performa Metode *Elastic-Net* dalam Kasus Multikolinearitas pada Analisis Linear Berganda

Hizkia Edwar Sinaga[1], Dewi Retno Sari Saputro[2]

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret Surakarta,

Jl. Ir. Sutami 36 A Kentingan Jebres Surakarta Jawa Tengah, 57126, Indonesia

hizkiaedwarsinaga@gmail.com

Abstrak—Analisis linear berganda umum digunakan untuk menganalisis data dengan variabel yang banyak. Selama proses menganalisa terdapat masalah umum yang sering dijumpai yaitu multikolinearitas. Multikolinearitas dapat diartikan sebagai adanya korelasi antara dua atau lebih variabel bebas. Multikolinearitas dapat dideteksi dengan cara: menghitung koefisien korelasi antara sesama variabel bebas, menghitung nilai *Variance Inflation Factor* (VIF), menghitung nilai TOL yaitu suatu ukuran *tolerance* untuk deteksi multikolinearitas, dan menghitung *Condition Number* (CN). Multikolinearitas dapat diatasi dengan cara: menambah data baru, menerapkan analisis komponen utama, menggunakan regresi gulud, menggunakan metode LASSO, dan menggunakan metode *Elastic-Net.* Metode *Elastic-Net* merupakan salah satu cara terbaik yang dapat digunakan. *Elastic-Net* menggabungkan penalti penyusutan regresi gulud dan LASSO sehingga membuatnya lebih efisien. Apabila $\alpha = 0$, penalti penyusutan *Elastic-Net* menjadi penlati penyusutan regresi gulud. Apabila $\alpha = 1$, penalti penyusutan *Elastic-Net* menjadi penaltipenyusutan LASSO. Hasil penelitian menunjukkan performa metode *Elastic-Net* dapat menangani multikolinearitas pada analisis linear berganda.

Kata kunci: Analisis Linear Berganda, Multikolinearitas, Elastic-Net

I. PENDAHULUAN

Analisis regresi merupakan metode statistika yang digunakan untuk membentuk model hubungan antara variabel terikat (Y) dengan satu atau lebih variabel bebas (X) [1]. Pada umumnya analisis regresi dibagi menjadi dua jenis, yaitu analisis linier sederhana dan analisis linear berganda. Analisis regresi linier sederhana memiliki satu variabel bebas sedangkan analisis regresi linier berganda memiliki dua atau lebih variabel bebas didalamnya. Analisis regresi linier sederhana bertujuan untuk memprediksi nilai variabel terikat terhadap satu variable bebas, sedangkan analisis regresi linear berganda bertujuan untuk memprediksi nilai variabel terikat terhadap dua atau lebih variabel bebas [2]. Seiring berkembangnya zaman, banyak data di dunia semakin berkembang. Data yang beredar dalam masyarakat masa kini biasanya berupa data kompleks yang memiliki banyak variabel. Sehingga analisis linier berganda lebih umum digunakan untuk menganalisa suatu data yang kompleks. Dalam proses menganalisa data bervariabel banyak biasanya terdapat permasalahan umum yang sering ditemui yaitu multikolinearitas. Menurut [3] dan [4] dikatakan bahwa multikolinearitas merupakan situasi dimana adanya korelasi atau hubungan yang kuat antara dua atau lebih variabel bebas dalam analisis regresi. Muktikolinearitas pada variabel bebas dapat mengakibatkan ragam penduga menjadi besar [5]. Dalam referensi [6] dijelaskan bahwa adanya multikolinearitas yang tinggi tidak memungkinkan melihat pengaruh variabel bebas terhadap variabel respon secara terpisah. Variabel respon merupakan nama lain untuk variabel terikat. Pada prinsipnya multikolinieritas tidak mengurangi nilai prediksi secara simultan namun mempengaruhi nilai prediksi dari suatu variabel bebas. Salah satu besaran yang dapat digunakan untuk mendeteksi adanya multikolinearitas adalah faktor *Variance Inflation Factor* (VIF). Nilai VIF lebih besar dari 10 mengidentifikasi adanya masalah multikolinearitas yang serius [7]. Multikolinearitas dapat diatasi dengan berbagai cara, antara lain penggunaan regresi terbaik [8], mencari tambahan data baru, penerapan analisis komponen utama [9], menggunakan regresi gulud (*Ridge Regression)* dan LASSO (*Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*) [10]. Metode lainnya yang dapat digunakan ialah *Elastic-Net*. *Elastic-Net* merupakan metode penyusutan yang menggabungkan penalti dari regresi gulud dan LASSO. *Elastic-Net* diperkenalkan pertama kali oleh Zou dan Hastie pada tahun 2005. Tujuan penelitian ini untuk melakukan kajian performa metode *Elastic-Net* dalam menangani multikolinearitas pada analisis linear berganda.

II. METODE PENELITAN

Penelitian ini merupakan penelitian berbasis teori yang mengkaji metode *Elastic-Net* pada analisis linear berganda. Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan ini adalah studi literatur yang diperoleh dari berbagai artikel, jurnal, dan buku yang mendukung untuk mencapai tujuan penelitian.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model Regresi Linear Berganda

Regresi merupakan tempat kedudukan nilai tengah dari peubah Y untuk berbagai nilai atau selang nilai peubah X, serta merupakan usaha untuk mengepas suatu fungsi atau kurva terhadap pancaran titik-titik pada sumbu X-Y [11]. Peubah memiliki arti yang sama dengan variabel. Model linear memiliki arti linear dalam parameter [12]. Hubungan variabel X dan Y dapat dibentuk ke dalam model linear

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ij} + \varepsilon_i \,. \tag{1}$$

Persamaan (1) disebut dengan model regresi linier berganda, dengan

Y_i : variabel terikat

X_i : variabel bebas

β_j : koefisien regresi yang tidak diketahui dengan j=0,1,2,…,k

εi : galat atau eror

i : 1,2,…,n

Menurut [12] asumsi-asumsi yang harus dipenuhi dalam model regresi linier berganda dinyatakan sebagai berikut.

1. ε_i merupakan suatu variabel random dengan mean sama dengan nol dan varians konstan, yang dinyatakan sebagai berikut.

   $\varepsilon_i \sim NID(0,\sigma^2)$

2. ε_i dan ε_j tidak berkorelasi untuk i ≠ j, yang dinyatakan sebagai berikut.
   $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$
3. tidak terjadi multikolinearitas antara variabel bebas $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Persamaan (1) dapat dituliskan dengan persamaan matriks

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2}$$

Metode Kuadrat Terkecil (MKT) dapat digunakan untuk menduga nilai koefisien regresi linear. MKT bertujuan untuk meminimumkan jumlah kuadrat dari sisaan (*error of sum square*). Untuk mendapatkan pendugaan parameter MKT bagi **β**, “(2)” dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{e} \text{ atau}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{3}$$

e-ISSN No. 2721-6802

Jumlah kuadrat sisaan diminimumkan dengan $\sum_{i=1}^{k} e_i^2 =$ minimum demi mencapai tujuan MKT, sehingga diperoleh persamaan

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} e_i^2 &= \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} \\ &= (\mathbf{y}\text{-}\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{y}\text{-}\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})\end{aligned}$$

sehingga,

$$\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\text{-}2\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}+\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \tag{4}$$

Untuk dugaan β akan menghasilkan solusi unik, didapatkan dengan mendiferensialkan $\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}$ terhadap $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}$ ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\end{aligned} \tag{5}$$

Multikolinearitas dalam bentuk matriks merupakan kondisi buruk atau *ill condition* dari matriks $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$, dimana kondisi tersebut menyalahi asumsi klasik pada regresi linear. Menurut [12] dalam kaitan dengan regresi, jika menginginkan invers dari matriks $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ namun matriks ini singular sehingga inversnya tidak ada. Terlihat bahwa sebagian dari persamaan normal itu merupakan kombinasi linear dari persamaan lainnya. Ini menyebabkan nilai dugaan yang unik tidak dapat diperoleh, kecuali ada syarat tambahan yang dikenakan pada parameter.

B. Multikolinearitas

Multikolinearitas dikatakan ada ketika terdapat dua atau lebih variabel bebas yang digunakan dan saling berkorelasi [13]. Beberapa masalah yang muncul akibat adanya multikolinearitas menurut [14] antara lain:
1. varians dan kovarians penduga kuadrat terkecil menjadi lebih besar,
2. standard galat yang besar menyebabkan selang kepercayaan bagi parameter menjadi lebih besar,
3. nilai statistik *t* yang tidak nyata,
4. nilai R^2 yang tinggi namun beberapa nilai statistik *t* tidak nyata.

Referensi [15] mengatakan ada beberapa cara mendeteksi multikolinearitas pada data pengamatan, yaitu

1. Dengan menghitung koefisien korelasi antara sesama variabel bebas.
2. Dengan menghitung nilai VIF. Semakin tinggi nilai VIF-nya maka semakin serius permasalahan multikolinearitasnya. VIF dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\mathrm{VIF}_j = \frac{1}{1\text{-}R_j^2} \tag{6}$$

   dengan R_j^2 merupakan koefisien determinasi yang didapat dari variabel bebas X_j diregresikan terhadap *k* variabel bebas yang lain. Jika X_j tidak berkorelasi dengan variabel bebas lain, maka R_j^2 akan bernilai kecil dan VIF_j mendekati satu. Sedangkan jika X_j mempunyai korelasi dengan variabel bebas yang lain, maka R_j^2 akan mendekati satu dan VIF_j menjadi besar nilainya.

3. Dengan menghitung TOL yaitu suatu ukuran *tolerance* untuk deteksi multikolinearitas. TOL dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\mathrm{TOL}_j &= \frac{1}{\mathrm{VIF}j} \\ &= 1\text{-}R_j^2\end{aligned} \tag{7}$$

X_j tidak akan berkolerasi dengan variabel bebas lainnya apabila nilai TOL_j bernilai 1. X_j akan berkolerasi dengan variabel bebas lainnya apabila nilai TOL_j bernilai 0.

4. Dengan menghitung *Condition Number* (CN). CN dinyatakan sebagai

$$\mathrm{CN} = \mathrm{K} = \left(\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_K}\right)^{1/2} \tag{8}$$

dimana $\hat{\lambda}_1$ adalah nilai *eigen* terbesar dan $\hat{\lambda}_K$ nilai *eigen* terkecil dari matriks kovarian.

Multikolinaeritas dapat diatasi dengan berbagai cara, salah satunya menggunakan metode regresi yang baik. Regresi gulud, LASSO, dan *Elastic-Net* merupakan contoh regresi yang biasa dipakai.

C. Regresi Gulud

Regresi gulud ditemukan oleh Hoerl pertama kali pada tahun 1962 untuk mengendalikan ketidakstabilan penduga MKT. Regresi gulud dan MKT memiliki tujuan yang sama yaitu untuk meminimumkan jumlah kuadrat sisaan (JKS) pada pendugaan koefisien regresi. Perbedaan keduanya terdapat pada penambahan penalti penyusutan dalam meminimumkan JKS. Pendugaan koefisien regresi gulud dilakukan dengan meminimumkan persamaan

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p}\beta_j\ Xij\ )^2 + \lambda\sum_{j=1}^{p}\beta_j^2\ = \mathrm{JKS} + \sum_{j=1}^{p}\beta_j^2 \tag{9}$$

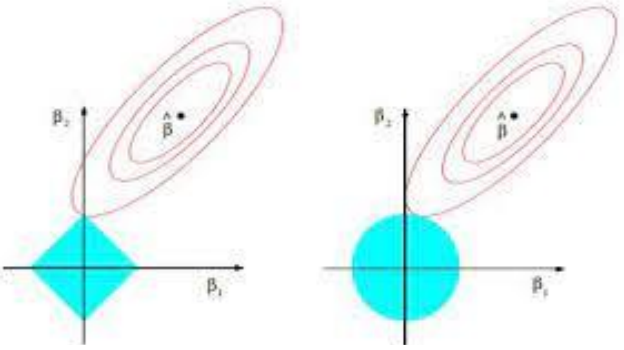
Persamaan (9) dibagi menjadi dua bagian yang berbeda. Bagian pertama sebagai kuadrat terkecil, regresi *ridge* mencari penduga koefisien yang mengepas data dengan baik, dengan meminimumkan JKS. Bagian kedua, $\sum_{j=1}^{p}\beta_j^2$ disebut penalti penyusutan yang bernilai kecil ketika $\beta_1,\ldots,\beta_p$ mendekati nol dan memberikan efek penyusutan koefisien β_j terhadap nol. Parameter penyusutan (λ) memberikan kontrol terhadap penyusutan koefisien regresi. Jika $\lambda = 0$, maka penalti penyusutan tidak memberikan pengaruh apapun sehingga regresi *ridge* akan menghasilkan MKT. namun, jika $\lambda \to \infty$ akan berdampak pada penalti penyusutan yang semakin besar dan koefisien pendugaan yang semakin mendekati nol. Pada MKT hanya dihasilkan satu set dugaan koefisien, sedangkan pada regresi *ridge* dihasilkan set dugaan berbeda-beda untuk setiap nilai λ yang dinotasikan dengan $\hat{\beta}_\lambda^R$. Penyusutan hanya ditunjukkan untuk peubah bebas, tidak pada peubah terikat.

D. LASSO

Regresi LASSO adalah slah satu metode penyusutan seperti ridge yang dapat mengatasi permasalahan multikolinearitas yang diperkenalkan oleh Tibshirani pada tahun 1996. Regresi ridge adalah proses kontinu yang mengecilkan koefisien dan karenanya lebih stabil. Namun, tidak menetapkan koefisien apapun menjadi 0 dan karenanya tidak memberikan model yang mudah diinterpretasikan. Sedangkan LASSO dapat menyusutkan beberapa koefisien dan menetapkan yang lain ke 0 [16]. Koefisien LASSO ($\hat{\beta}_\lambda^L$) meminimumkan persamaan

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p}\beta_j\ Xij\ )^2 + \lambda\sum_{j=1}^{p}|\beta_j|\ = \mathrm{JKS} + \sum_{j=1}^{p}|\beta_j| \tag{10}$$

LASSO dan regresi *ridge* memiliki formula yang hampir sama, hanya penaltinya saja yang berbeda. Penalti penyusutan pada regresi ridge diganti dengan $|\beta_j|$ sebagai penalti penyusutan LASSO. LASSO sering disebut dengan penalti L_1 dan regresi gulud sering disebut dengan penalti L_2. Penalti L_1 dari vektor koefisien β adalah $\|\beta\|_1 = \sum|\beta_j|$. LASSO menyusutkan dugaan koefisien mendekati nol. Pada LASSO, penalti L_1 memberikan efek beberapa dugaan koefisien menjadi tepat nol ketika λ cukup besar [17]. Hal tersebut menyebabkan LASSO dapat menghasilkan model dengan peubah bebas yang lebih sedikit.



GAMBAR 1. Pendugaan untuk LASSO (kiri) dan *ridge* (kanan)

Gambar 1 memberikan ilustrasi tentang penalti LASSO dalam membuat nilai koefisien menjadi 0 pada dua peubah bebas. $\hat{\beta}$ merupakan nilai dugaan dari MKT dan garis elips berwarna merah adalah sisaan dari MKT. Daerah penalti untuk LASSO $|\beta_1| + |\beta_2| \leq s$ memiliki bentuk belah ketupat, sedangkan daerah penalti untuk *ridge* $\beta_1^2 + \beta_2^2 \leq s$ memiliki bentuk lingkaran. Bentuk belah ketupat memiliki sudut, maka ketika elips menyentuh sudut tersebut berarti salah satu koefisien bernilai 0. Bentuk lingkaran tidak memiliki sudut, sehingga elips menjadi lebih sulit bersinggungan dengan daerah kendala pada titik 0. Ketika $p > 2$, maka kendala LASSO memiliki sudut lebih banyak sehingga peluang suatu koefisien bernilai 0 lebih besar [18].

E. Elastic-Net

Elastic-Net merupakan metode yang dirangkai untuk menutup kekurangan dari metode LASSO dan regresi gulud. Referensi [19] memaparkan beberapa kekurangan LASSO, yakni

1. Ketika $p > n$, maka LASSO hanya memilih n peubah yang diikutkan dalam model.
2. Jika ada sekumpulan peubah dengan korelasi tinggi, maka LASSO hanya sembarang memilih salah satu peubah saja.
3. Ketika $p < n$, kinerja LASSO lebih didominasi oleh gulud.

Zou dan Hastie pada tahun 2005 memperkenalkan penalti *Elastic-Net* yang ditulis sebagai

$$\sum_{j=1}^{p}[\alpha|\beta_j| + (1-\alpha)\,\beta_j{}^2] \tag{11}$$

Pada reguralisasi *Elastic-Net* terdapat penyusutan koefisien bersama dari peubah-peubah penjelas yang berkorelasi seperti gulud dan seleksi peubah seperti LASSO [18].

Persamaan *Elastic-Net* dapat ditulis sebagai

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j)^2 + \lambda_2 \sum_{j=1}^{p} \beta_j{}^2 + \lambda_1 \sum_{j=1}^{p}|\beta_j| \tag{12}$$

dengan $\alpha = \frac{\lambda 1}{\lambda 1 + \lambda 2}$, $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j)^2 + \lambda[(1-\alpha)\sum_{j=1}^{p} \beta_j{}^2 + \alpha\,(\sum_{j=1}^{p}|\beta_j|)] \tag{13}$$

dengan α adalah parameter gabungan antara regresi gulud ($\alpha = 0$) dan LASSO ($\alpha = 1$). Jika $\alpha = 0$, maka penalti penyusutan pada *Elastic-Net* menjadi penalti penyusutan regresi gulud. Sedangkan ketika $\alpha = 1$, maka penalti penyusutan pada *Elastic-Net* menjadi penalti penyusutan LASSO.

IV. SIMPULAN DAN SARAN

A. *Simpulan*

Multikolinearitas merupakan masalah yang dihadapi ketika menganalisa regresi linear berganda. Multikolinearitas dapat dideteksi dengan banyak cara, salah satunya dengan nilai VIF. Banyak metode yang dapat digunakan untuk mengatasi masalah multikolinearitas, salah satu yang paling efektif adalah metode *Elastic-Net*. Metode *Elastic-Net* mampu menutupi kekurangan LASSO yang memilih secara acak satu dari antara variabel yang berkorelasi sangat tinggi dimana *Elastic-Net* melakukan seleksi terlebih dahulu. Metode *Elastic-Net* juga mampu menutupi kekurangan *ridge* yang cenderung menyusutkan koefisien variabel menuju 0 namun tidak sampai 0, hal ini menyebabkan tidak terjadinya seleksi variabel yang berkorelasi. Metode *Elastic-Net* dapat menyusutkan variabel yang saling berkorelasi dengan bantuan penalti penyusutan gabungan antara regresi gulud dan LASSO. Apabila $\alpha = 0$, penalti penyusutan *Elastic-Net* menjadi penlati penyusutan regresi gulud. Apabila $\alpha = 1$, penalti penyusutan *Elastic-Net* menjadi penalti penyusutan LASSO. Dengan demikian *Elastic-Net* dapat meminimumkan JKS dengan lebih optimal dibanding regresi gulud ataupun LASSO.

B. *Saran*

Saran apabila penelitian ini dilanjutkan dapat dilakukan penelitian dengan menggunakan data agar peforma dari *Elastic-Net* lebih teruji.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Greene, W. H., “Econometric Analysis Ed ke-7”, New York: Pearson, 2012.

[2] Montgomery, D.C. and E.A. Peack., *Introduction to Linear Regression Analysis,* New York: John Willey & Sons, 2nd edition, 1991.

[3] Sartika, I., N.N. Debataraja, dan N. Imro’ah, Analisis Regresi dengan Metode *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*(LASSO) dalam Mengatasi Multikolinieritas, Bimaster, 09(1), 31-38, 2020.

[4] Sriningsih, M., D. Hatidja, dan J.D. Prang, Penanganan Multikolinieritas Dengan Menggunakan Analisis Regresi Komponen Utama pada Kasus Impor Beras di Provinsi Sulut, Jurnal Ilmiah Sains, 18(01), hal. 19-24, 2018.

[5] Mela, C. F. and P. K. Kopalle, The impact of collinearity on regression analysis: the asymmetric effect of negative and positive correlation, Applied Economics 34, pp. 667–677, 2002.

[6] Gujarati, D., *Ekonometri Dasar (Terjemahan),* Edisi Ke-2, Alih Bahasa Zeinn S., Jakarta: Erlangga, 1992.

[7] Ryan, T.P., *Modern Regression Methods,* Georgia: John Willey & Sons, 1997.

[8] Triwinasis, A., *Pemilihan Model Regresi Terbaik dengan Metode regresi Semua Kemungkinan, Metode Eliminasi Langkah Mundur dan Metode Regresi Bertatar*. Skripsi, Jember:MIPA Jember, 2003.

[9] Adriyani, V. D., *Penggunaan Analisis Komponen Utama untuk Mengatasi Multikolinearitas dalam Analisis Regresi Linear Berganda*. Skripsi, Jember: MIPA Jember, 2003.

[10] Dinanti, D.F., “Regularisasi *Elastic-Net* dalam *Statistical Downs* untuk Pendugan Curah Hujan”. Skripsi, Bogor: Statistika IPB, 2016.

[11] Aunuddin, Statistika: Rancangan dan Analisis Data, Bogor: IPB Press, 2005.

[12] Draper, N. dan H. Smith, *Analisis Regresi Terapan(Terjemahan),* Edisi ke-2, Alih Bahasa Bambang Sumantri, Jakarta: Gramedia, 1992.

[13] Mendelhall, W. and Sinich T., *A Second Course In Statistics Regression Analysis,* 5th edition, New Jersey, 1996.

[14] Gaspersz, V., *Ekonomi Terapan I,* Bandung: Tarsito bandung, 1991.

[15] Naes, T., Isaksson, T., Fearn, T., & Davies, T., *Multivariate calibration and classification*. West Sussex: NIR Publication, 2002.

[16] Kusuma, G. W. dan I. Y. Wulansari, Analisis Kemiskinan dan Kerentanan Kemiskinan dengan Regresi *Ridge*, LASSO, dan *Elstic-Net* di Provinsi Jawa Tengah Tahun 2017, Seminar Nasional *Official Statistics* 2019: Pengembangan *Official Statistics* dalam mendukung Implementasi SDG’S, 2019.

[17] Fanny, R., “Pendugaan Produktivitas Penangkapan Bagan Perahu di Pantai Carocok Tarusan Sumatera Barat dengan Regresi Gulud, LASSO dan *Elastic-Net*”. Skripsi, Bogor: Statistika IPB, 2018.

[18] Hastie, T., R. Tibshirani, and J. Friedman, The Elements of Statistical Learning. Data Mining, Inference, and Prediction, New York: Springer, 2008.

[19] Zou, H. and T. Hastie, *Regularization and variable selection via the elastic-net,* Journal of the Royal Statistical Society Series, B 67, 301-320, 2005.